Rida Laraki, Jérôme Renault & Sylvain Sorin

# Bases Mathématiques de la Théorie des Jeux



Bases mathématiques de la

# Théorie des jeux

Rida Laraki, Jérôme Renault & Sylvain Sorin









91128 Palaiseau Cedex

Résumé. Le but du cours est de présenter certains outils et résultats fondamentaux de la théorie des jeux. On étudiera principalement l'approche stratégique en considérant les problèmes liés à l'information et à la dynamique.

Les auteurs remercient Miquel Oliu-Barton, Tristan Tomala, Cheng Wan ainsi que Vianney Perchet, Guillaume Vigeral et Yannick Viossat pour leurs lectures attentives et leurs remarques judicieuses.

# Table des matières

CHAPITRE 1

# Introduction

## 1. Interaction stratégique

La théorie des jeux vise à analyser des situations d'interaction stratégique où plusieurs entités (agents, populations, entreprises, automates, ...) sont porteuses de caractéristiques (actions, gènes, prix, codes, ...) qui les affectent mutuellement. Plusieurs niveaux de modélisation ont été proposés. Nous les passons rapidement en vue.

### 1.1. Jeux stratégiques.

Ce cadre correspond à l'axe qui sera privilégié dans ce cours.
Il consiste d'abord à identifier les structures autonomes qui interagissent, appelées *joueurs*. Par autonomie on entend le fait que leurs caractéristiques, paramètres ou choix, appelés *actions*, sont déterminés de manières indépendantes les uns des autres.
Un profil d'actions induit un résultat et chaque joueur possède une fonction d'évaluation définie sur l'espace des résultats et à valeurs réelles.

### 1.2. Jeux coalitionnels.

Dans cette approche la donnée initiale est encore un ensemble de joueurs mais sont pris en compte tous les sous-ensembles possibles, appelés *coalitions* et une fonction d'effectivité associe à chacune d'entre elles la famille des résultats qu'elle peut atteindre. La problématique consiste alors à en déduire un résultat global pour tous les joueurs.
Il s'agit ici d'un point de vue plus "normatif" ou axiomatique qui à partir de considérations sur des normes d'équité, de pouvoir ou d'efficience propose une solution.
Le lien avec l'approche précédente est à double sens :
Passage 1.1. → 1.2. : des analyses d'ordre stratégique sur le choix des actions d'une coalition permettent de définir une fonction caractéristique (ou d'effectivité) et on applique ensuite le programme des jeux coalitionnels.
Passage 1.2. → 1.1. : "programme de Nash". Partant de la fonction d'effectivité on définit des actions et une fonction d'évaluation telle que le jeu stratégique correspondant induise la solution choisie.

### 1.3. Choix social.

Il s'agit ici de l'étude, dans le cadre d'un jeu défini par un ensemble de joueurs, de l'impact des règles sur le résultat final. L'intérêt se déplace de l'examen des comportements stratégiques vers l'analyse de l'influence de la procédure sur le déroulement du jeu. Les domaines connexes sont les théories des incitations et des contrats.

## 2. Exemples

### 2.1. Mariages stables.

On considère deux familles finies $I$ et $J$ (hommes/femmes, employés/firmes ...) de même cardinal tel que chaque élément $i \in I$ (resp. $j \in J$) possède un ordre total strict sur $J$ (resp. $I$). Le problème est l'existence et la caractérisation des mariages stables, i.e. des bijections $\pi$ de $I$ dans $J$ telles qu'il n'existe pas de couples $(i, \pi(i) = j)$, $(i', \pi(i') = j')$ avec $j'$ préféré par $i$ à $j$ et simultanément $i$ préféré à $i'$ par $j'$. (Voir Exercice 1.1).

### 2.2. Problème de partage.

On représente par $[0, 1]$ un ensemble sur le partage duquel deux joueurs ont des préférences. Le jeu se déroule entre les instants 0 et 1. Le joueur qui arrête le premier à l'instant $t$ gagne la part $[0, t]$ de l'ensemble, son adversaire ayant le complément. On suppose que $a_1(t)$ (resp. $a_2(t)$) qui décrit l' évaluation par le joueur 1 (resp. 2) de $[0, t]$, est une fonction continue croissante de 0 à 1 ($1 - a_i(t)$ est alors l'évaluation du complémentaire). Chaque joueur $i$ peut obtenir 1/2 en décidant d'arrêter à l'instant $t_i$ avec $a_i(t_i) = 1/2$ (si l'adversaire arrête avant, tant mieux). Par contre si $t_i < t_j$, et que le joueur $i$ le sait, il peut anticiper que $j$ ne va pas arrêter avant $t_j$ et tenter $t_j - \varepsilon$. On voit apparaître ici des questions liées à l'information sur les caractéristiques de l'adversaire, aux anticipations sur son comportement (rationalité) et à l'influence de la procédure sur l'issue ($j$ souhaite si $t_i < t_j$, que l'on partage en allant de 1 à 0). (Voir Exercice 1.2).

### 2.3. Equilibre de transport.

On modélise par l'intervalle $[0, 1]$ muni de la mesure de Lebesgue un ensemble formé d'un grand nombre de joueurs négligeables, chacun utilisant soit une voiture, soit le métro. On suppose qu'ils ont tous la même évaluation du traffic qui se traduit par une fonction croissante $v$, resp. $m$, de $[0, 1]$ dans lui même, $v(t)$ étant leur "utilité" si ils utilisent la voiture (resp. le métro) quand une proportion $t$ de la population prend le métro. Si $v > m$ le seul équilibre est $t = 0$, même si le résultat $v(0)$ peut être inférieur à un autre résultat possible $m(1)$. Si les courbes $m$ et $v$ se coupent, les

points d'intersection sont des équilibres qui peuvent être stables ou instables. (Voir Exercice 1.3).

**2.4. Enchères.**
Un objet est mis aux enchères et $n$ joueurs ont des valuations $v_i, i = 1, ..., n$, à son sujet. On peut considérer des enchères descendantes où le prix d'offre $p$ décroit jusqu'à une acceptation, ou montantes où les joueurs font des offres croissantes successives. Un autre modèle correspond au cas où les joueurs font des offres $b_i$ par écrit et l'arbitre attribue l'objet au joueur ayant fait la plus grande offre. Si le prix à payer est la plus grande offre, les joueurs ont intérêt à connaitre les préférences de leurs adversaires. Si le prix correspond à la deuxième plus grande offre, la stratégie $b_i = v_i$ correspondant à une enchère sincère est dominante. (Voir Exercice 1.4).

**2.5. Paradoxe de Condorcet.**
3 joueurs $a, b, c$ ont des préférences strictes sur 3 candidats $A, B, C$. Si $a$ classe $A > B > C$, $b$ classe $B > C > A$ et $c$ classe $C > A > B$, une élimination binaire des candidats de la forme : on choisit à la majorité entre $A$ et $B$, puis le vainqueur est opposé à $C$, etc ... induit un cycle sur les candidats.

On modélise maintenant des situations dynamiques.

**2.6. Jeu d'évolution.**
On considère une compétition entre 3 bactéries : $a$ produit des virus et des anti-virus. $b$ produit des anti-virus et $c$ ne produit rien. La production est coûteuse donc $b$ gagne face à $a$ et $c$ face à $b$ mais $a$ infeste $c$. On est en présence d'un cycle. Il peut exister un point stationnaire intérieur (où les 3 bactéries sont présentes simultanément) mais son type peut être attractif ou répulsif.

**2.7. Jeu stochastique.**
On considère une situation où 2 pêcheurs exploitent la même espèce qui est en quantité importante ($a$), faible ($b$) ou en extinction ($c$). Les joueurs ont une activité intense ($I$) ou réduite ($R$) et le résultat de leur activité qui dépend de l'état de l'espèce ($a$, $b$ ou $c$) est une quantité de pêche et une probabilité sur le nouvel état. Ceci définit un *jeu stochastique*. Dans l'état $a$ la quantité de pêche est

| | $I$ | $R$ |
|---|---|---|
| $I$ | $100, 100$ | $120, 60$ |
| $R$ | $60, 120$ | $80, 80$ |

et l'évolution de l'état est défini par

| | $I$ | $R$ |
|---|---|---|
| $I$ | $(0.3, 0.5, 0.2)$ | $(0.5, 0.4, 0.1)$ |
| $R$ | $(0.5, 0.4, 0.1)$ | $(0.6, 0.4, 0)$ |

Par exemple si le joueur 1 pêche beaucoup ($I$) et le joueur 2 peu ($R$), leurs gains seront $(120, 60)$ et l'état le jour suivant sera $a$ avec probabilité 0.5, resp. ($b$; 0.4) et ($c$; 0.1).
Dans l'état $b$ les données sont pour les résultats

| | $I$ | $R$ |
|---|---|---|
| $I$ | $50, 50$ | $60, 30$ |
| $R$ | $30, 60$ | $40, 40$ |

et pour les transitions

| | $I$ | $R$ |
|---|---|---|
| $I$ | $(0, 0.5, 0.5)$ | $(0.1, 0.6, 0.3)$ |
| $R$ | $(0.1, 0.6, 0.3)$ | $(0.8, 0.2, 0)$ |

et dans l'état $c$ la pêche est nulle et l'état absorbant. Il y a clairement un conflit entre le gain immédiat et l'état futur, et le comportement dépend de la durée de l'interaction. (Voir Chapitre 8, Section 5).

### 2.8. Jeu répété.

On considère une situation d'interaction répétée entre 2 joueurs où le résultat de l'interaction chaque jour est donné par

| | $\alpha$ | $\beta$ |
|---|---|---|
| $a$ | $10, 0$ | $1, 1$ |
| $b$ | $5, 5$ | $0, 0$ |

Si on ne tient pas compte du futur, on obtient une répétition de $(a, \beta)$ mais on peut introduire des menaces du type "jouer $\beta$ pour toujours dans le futur" pour stabiliser le résultat $(b, \alpha)$. L'utilisation du couple *plan* et *menaces* est fondamental dans l'étude des jeux répétés. (Voir Chapitre 8).

## 3. Notations et concepts de base

### 3.1. Jeu stratégique.

Un *jeu stratégique sous forme normale* $G$ est défini par :
- un ensemble $I$ de *joueurs* (de cardinal $n$)
- un ensemble $S^i$ de *stratégies* pour chaque joueur $i \in I$
- une application $g$ de $S = \Pi_{i=1}^n S^i$ dans $\mathbb{R}^n$.

$g^i(s^1, \cdots, s^n)$ est le *gain* du joueur $i$ lorsque le *profil* $s = (s^1, \cdots, s^n)$ est joué. On note aussi $s = (s^i, s^{-i})$ où $s^{-i}$ dénote le vecteur des stratégies $s^j$ des joueurs $j$ autres que $i$ et $S^{-i} = \Pi_{j \neq i} S^j$.

Plus généralement une *forme jeu* est une application $F$ de $S$ dans un espace de résultats $R$. Chaque joueur a un préordre total $\succ_i$ sur $R$. Si celui-ci est représenté par une fonction d'utilité $u^i$ de $R$ dans $\mathbb{R}$ la composition $u^i \circ F$ donne $g^i$ qui est l'évaluation par $i$ du résultat. (Cela revient à prendre comme ensemble de résultats l'ensemble $S$ des profils.)

### 3.2. Domination.

Pour $x$ et $y$ dans $\mathbb{R}^n$ on note :
$x >> y$ si $x^i > y^i$, $\forall i$,
$x > y$ si $x^i \geq y^i$, $\forall i$, et $x \neq y$,
$x \geq y$ si $x^i \geq y^i$, $\forall i$.
$s^i$ est une stratégie *strictement dominante* (resp. *dominante*) si

$$g^i(s^i, .) >> g^i(t^i, .) \quad \forall t^i \in S^i.$$

resp.

$$g^i(s^i, .) \geq g^i(t^i, .) \quad \forall t^i \in S^i.$$

$s^i$ est *strictement dominée* (resp. *faiblement dominée*) si il existe $t^i$ avec

$$g^i(s^i, .) << g^i(t^i, .)$$

resp.

$$g^i(s^i, .) < g^i(t^i, .).$$

### 3.3. Elimination itérée.

Le jeu est *résoluble* si l'*élimination itérée* des stratégies strictement dominées converge vers un ensemble réduit à un point (en particulier si chaque joueur possède une stratégie strictement dominante), voir Example 4.1.

### 3.4. Meilleure réponse.

La *correspondance de $\varepsilon$-meilleure réponse* ($\varepsilon \geq 0$), $BR^i_\varepsilon$ de $S^{-i}$ dans $S^i$, est définie

par :

$$BR^i_\varepsilon(s^{-i}) = \{s^i \in S^i : g^i(s^i, s^{-i}) \geq g^i(t^i, s^{-i}) - \varepsilon, \forall t^i \in S^i\}.$$

Elle associe à tout profil de stratégies des joueurs autres que $i$, l'ensemble des $\varepsilon$-meilleures réponses du joueur $i$.

### 3.5. Extension mixte.

Dans le cas d'espaces de stratégies mesurables $(S^i, \mathcal{S}^i)$, une *extension mixte* du jeu $G$ est la donnée pour chaque $i$, d'un sous ensemble $T^i$ de l'ensemble des probabilités sur $(S^i, \mathcal{S}^i)$, convexe et contenant $S^i$ (identifié aux masses de Dirac).
On suppose que le théorème de Fubini s'applique à l'intégrale de $g$ sur $T = \Pi_{i=1}^n T^i$. Cela permet de définir le paiement étendu qui est l'espérance par rapport à la distribution produit générée par les stratégies mixtes des joueurs :

$$g^i(t) = \int_S g^i(s) \quad t^1(ds^1) \otimes \ldots \otimes t^n(ds^n).$$

Explicitement, dans le cas fini, si $\Delta = \prod_{i=1}^n \Delta(S^i)$ dénote l'ensemble des stratégies mixtes et si $\sigma$ est le profil $\sigma = (\sigma^1, ..., \sigma^n) \in \Delta$, le paiement pour le joueur $i$ dans l'extension mixte du jeu est :

$$g^i(\sigma) = \sum_{s=(s^1,\ldots,s^n)\in S} \prod_j \sigma^j(s^j) g^i(s).$$

et correspond à l'extension multilinéaire de $g$.

## 4. Information et rationalité

### 4.1. Stratégie dominante et résultat dominé.

| | $\alpha$ | $\beta$ |
|---|---|---|
| $a$ | $10, 0$ | $1, 1$ |
| $b$ | $5, 5$ | $0, 0$ |

Dans ce jeu, $a$ domine strictement $b$, puis $\beta$ est une meilleure réponse à $a$, d'où le résultat $(1, 1)$ par élimination itérée.
En l'absence de $a$, le résultat est $(5, 5)$.

### 4.2. Ordre d'élimination.

| | $\alpha$ | $\beta$ |
|---|---|---|
| $a$ | $2, 2$ | $1, 2$ |
| $b$ | $2, 0$ | $0, 1$ |

$(2, 2)$ est éliminé par domination faible si on commence par le joueur 2, mais pas si

on commence par le joueur 1.
**Résultat** : Il n'y a, par contre, pas d'ambiguité pour l'élimination itérée via domination stricte.

### 4.3. Domination et Pareto optimalité.

Dans le jeu suivant

| | | |
|---|---|---|
| 1,0 | 0,1 | 1,0 |
| 0,1 | 1,0 | 1,0 |
| 0,1 | 0,1 | 1,1 |

$(1,1)$ est le seul paiement parétien et est éliminé par domination faible.

### 4.4. Hypothèses de connaissance.

Il est fondamental de distinguer la connaissance de l'état ou *factual knowledge*, qui correspond à la connaissance des paramètres du jeu : stratégies, paiements (dans ce cadre les *procédures autonomes* pour un joueur sont celles qui ne dépendent que de ses propres stratégies et de son propre paiement), et la connaissance du monde ou *epistemic knowledge* qui consiste en plus en la connaissance de l'information et de la rationalité (éventuelle) des adversaires.
On fait alors face à un paradoxe circulaire : pour définir la rationalité d'un joueur il faut spécifier son information qui inclut, entre autres, son information sur la rationalité de ses adversaires.

### 4.5. Domination et extension mixte.

La notion de domination dépend du cadre considéré :

| | | |
|---|---|---|
| $a$ | 3 | 0 |
| $b$ | 1 | 1 |
| $c$ | 0 | 3 |

La stratégie $b$ n'est pas dominée par $a$ ou $b$ mais est dominée par la stratégie mixte $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c$.

### 4.6. Dynamique et anticipation.

La différence principale dans les situations dynamiques entre la modélisation en terme de *jeu répété* ou de *jeu d'évolution* est la prise en compte, ou non, par chaque joueur, des conséquences de son action présente sur le comportement futur des autres participants. Le premier modèle tient compte des interactions dues à des anticipations

rationnelles. Le second décrit les conséquences au niveau global de procédures adaptatives myopes et locales.

**Références**

Parmi les nombreux ouvrages récents soulignons :

Aumann R.J. and S. Hart, eds., *Handbook of Game Theory* , Vol. 1, 2, 3, North Holland, 1992, 1994, 2002. (4 à paraître).
Il s'agit d'une somme "encyclopédique" où chaque chapitre couvre un domaine précis ; une visite s'impose.

Hofbauer J. and K. Sigmund, *Evolutionary Games and Population Dynamics*, Cambridge U.P., 1998.
LA référence concernant les jeux d'évolution.

Laraki R., Renault J. et T. Tomala, *Théorie des Jeux*, X-UPS 2006, Editions de l'Ecole Polytechnique.
Une introduction moderne et rapide aux jeux stratégiques et aux jeux répétés.

Owen G., *Game Theory* (3rd Edition), Academic Press, 1995.
Un ouvrage classique et d'approche aisée.

Sorin S., *A First Course on Zero-Sum Repeated Games*, Springer, 2002.
Un panorama des jeux répétés à somme nulle.

van Damme E., *Stability and Perfection of Nash Equilibria*, Springer, 1991.
Une approche précise de la sélection d'équilibre.

Weibull J., *Evolutionary Game Theory*, MIT Press, 1995.
Un ouvrage agréable sur les liens économie/évolution.

Enfin citons deux ouvrages de vulgarisation récents :

G. Giraud, *La Théorie des Jeux*, Flammarion, 2009.

B. Guerrien, *La Théorie des Jeux*, Economica, 2010.

CHAPITRE 2

# Jeux à somme nulle : le cas fini

Les jeux à somme nulle sont les jeux à deux joueurs où la somme des fonctions de paiement est nulle. Dans ce type d'interaction stratégique, les intérêts des joueurs sont opposés donc le conflit est total et il n'y a pas de coopération possible.

## 1. Généralités, valeur et stratégies optimales

**Définition 1.1.** *Un jeu à somme nulle sous forme stratégique est défini par un triplet* $(I, J, g)$ *où* $I$ *(resp.* $J$*) est l'ensemble (non vide) d'actions du joueur 1 (resp. 2), et* $g : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$ *est la fonction de gain du joueur 1.*

L'interprétation est la suivante. Indépendamment, le joueur 1 choisit $i$ dans $I$ et le joueur 2 choisit $j$ dans $J$. Le paiement du joueur 1 est alors $g(i, j)$, et celui du joueur 2 est $-g(i, j)$ (les évaluations du résultat induit par le choix $(i, j)$ sont opposées pour les deux joueurs). Avec les notations du chapitre 1 on a donc $g^1 = g = -g^2$ d'où la terminologie jeu à somme nulle. Chacun des deux joueurs connaît le triplet $(I, J, g)$.

Lorsque $I$ et $J$ sont finis, on dit, sans surprise, que $(I, J, g)$ est un jeu à somme nulle fini. On représente alors le jeu par une matrice $A$, où le joueur 1 choisit la ligne $i$, le joueur 2 choisit la colonne $j$, et l'entrée $A_{ij}$ de la matrice représentent le paiement $g(i, j)$. Par exemple, le jeu suivant est appelé Matching Pennies :

| | |
|---|---|
| 1 | -1 |
| -1 | 1 |

Réciproquement, toute matrice réelle peut être vue comme un jeu fini à somme nulle, aussi appelé *jeu matriciel*.

On fixe dans la suite un jeu à somme nulle $G = (I, J, g)$. Le joueur 1 maximise la fonction de paiement $g$, mais celle-ci dépend de deux variables $i$ et $j$, et le joueur 1 ne contrôle que la variable $i$ et pas la variable $j$. A l'opposé, le joueur 2 minimise $g$, et contrôle $j$ mais pas $i$.

**Définition 1.2.** *Le joueur 1 garantit* $w \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ *dans* $G$ *si il possède une action*

*qui lui assure un paiement au moins égal à $w$, i.e. si :*

$$\exists i \in I, \forall j \in J, \ g(i,j) \geq w.$$

*Symétriquement, le joueur 2 garantit $w \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ dans $G$ s'il a une action qui lui assure de ne pas perdre plus que $w$, i.e. si*

$$\exists j \in J, \forall i \in I, \ g(i,j) \leq w.$$

Il est clair que pour tout $i$ dans $I$ le joueur 1 garantit $\inf_{j \in J} g(i,j)$, et pour $j$ dans $J$ le joueur 2 garantit $\sup_{i \in I} g(i,j)$.

**Définition 1.3.**

*Le maxmin de $G$, noté $\underline{v}$, est la quantité $\sup_{i \in I} \inf_{j \in J} g(i,j) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.*

*Le minmax de $G$, noté $\overline{v}$, est la quantité $\inf_{j \in J} \sup_{i \in I} g(i,j) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.*

Ainsi, le maxmin est le supremum des quantités garanties par le joueur 1, et le minmax est l'infimum des quantités garanties par le joueur 2. Le maxmin peut être vu comme l'évaluation de l'interaction où le joueur 1 choisirait $i$ en premier, puis le joueur 2 choisirait $j$ en connaissant $i$. Il s'agit de la pire situation pour le joueur 1 et donc conduit à une borne inférieure sur son paiement. De même, le minmax correspond à l'interaction où c'est le joueur 2 qui joue en premier, puis le joueur 1 joue en connaissant l'action de son adversaire. (Si le joueur 1 joue en premier mais que son choix n'est pas connu par le joueur 2, il y a indépendance des choix).
Le fait que la première situation soit moins favorable au joueur 1 se traduit par le lemme suivant :

**Lemme 1.4.**

$$\underline{v} \leq \overline{v}.$$

Preuve : Pour tous $i$ dans $I$ et $j$ dans $J$, on a : $g(i,j) \geq \inf_{j' \in J} g(i,j')$. En prenant le sup en $i$ de chaque côté, on obtient : $\sup_{i \in I} g(i,j) \geq \underline{v}$, pour tout $j$ de $J$. En prenant maintenant l'inf en $j$, on arrive à : $\overline{v} \geq \underline{v}$. ∎

L'écart $\overline{v} - \underline{v}$ est appelé le *saut de dualité.*

**Définition 1.5.** *On dit que le jeu $G$ a une valeur si $\underline{v} = \overline{v}$, et dans ce cas la valeur $v = \mathtt{val}(G)$ de $G$ est par définition $\underline{v} = \overline{v}$.*

Dans l'exemple Matching Pennies, on a : $\underline{v} = -1 < 1 = \overline{v}$, et le jeu n'a pas de valeur (on verra plus tard que l'extension mixte du jeu a une valeur).
Lorsque le jeu a une valeur, $v$ $(= \overline{v} = \underline{v})$, celle-ci correspond à l'issue rationnelle du

jeu, au sens de l'évaluation considérée comme équitable par les deux joueurs du jeu. La valeur peut alors être vue comme le prix du jeu $G$.

**Lemme 1.6.**
*S'il existe $w$ qui peut être garanti à la fois par le joueur 1 et le joueur 2, alors $w$ est unique et le jeu a une valeur qui vaut $w$.*

Preuve : On a alors $w \leq \underline{v} \leq \overline{v} \leq w$. ∎

**Définition 1.7.** *Une stratégie du joueur 1 est dite maxmin $\varepsilon$-optimale si elle garantit $\underline{v} - \varepsilon$. Si le jeu a une valeur, une telle stratégie est simplement dite $\varepsilon$-optimale. Les stratégies $\varepsilon$-optimales du joueur 2 sont définies de façon duale. Les stratégies 0-optimales sont dites optimales .*

**Exemple** : $G = (\mathbb{N}, \mathbb{N}, g)$, où $g(i,j) = 1/(i+j+1)$. Le jeu a une valeur qui est 0. Toutes les stratégies du joueur 1 sont optimales, et le joueur 2 n'a aucune stratégie optimale.

Lorsque les espaces $I$ et $J$ ont une structure mesurable, on peut considérer les extensions mixtes de $G$ (cf. Chapitre 1, Section 3). Si une stratégie dans $I$ garantit $w$ dans $G$, alors la même stratégie garantit également $w$ dans toute extension mixte $X, Y$ de $G$. En effet par linéarité de l'intégrale en $y$, $g(x,y) = \int_J g(x,j)dy(j) \geq w$ pour tout $y \in Y$, dès que $g(x,j) \geq w$ pour tout $j \in J$.

On en déduit :

**Lemme 1.8.**
*Le saut de dualité d'une extension mixte de $G$ est inférieur au saut de dualité initial de $G$.*

En particulier, si un jeu à somme nulle possède une valeur, alors toute extension mixte du jeu a également la même valeur.

Dans la suite de ce chapitre, on considère principalement le cas d'un jeu à somme nulle fini.

## 2. Le théorème du minmax

En théorie des jeux, on autorise souvent les joueurs à choisir leurs actions de manière aléatoire. Par exemple, si l'on doit jouer dans Matching Pennies, ou programmer un ordinateur qui va jouer ce jeu "on line", il est clairement intéressant de

choisir chaque action avec probabilité 1/2, afin de cacher à l'adversaire la ligne ou la colonne que l'on va jouer. (Une autre interprétation des actions "mixtes" est que la probabilité associée aux actions d'un joueur ne représente que la croyance de son adversaire sur son comportement (Harsanyi, 1973a) : voir le Chapitre 7).
Mathématiquement, considérer des actions mixtes permet d'avoir des ensembles d'actions convexes.

Si $S$ est un ensemble fini de cardinal $n$, on note $\Delta(S)$ l'ensemble des probabilités sur $S$ (ou le simplexe sur $S$) :

$$\Delta(S) = \{x \in I\!R^n; x^s \geq 0, \forall s \in S; \sum\nolimits_{s \in S} x^s = 1\}.$$

L'extension mixte d'un jeu fini $G = (I, J, g)$ est alors le jeu $\Gamma = (\Delta(I), \Delta(J), \gamma)$, où la fonction de paiement $g$ est étendue de manière multilinéaire en

$$\gamma(x, y) = \mathbb{E}_{x \otimes y}\, g = \sum\nolimits_{i,j} x^i y^j g(i, j).$$

Un élément $x$ de $\Delta(I)$, resp. $y$ de $\Delta(J)$, est appelé *stratégie mixte* du joueur 1, resp. joueur 2, dans le jeu $\Gamma$. Par opposition, un élément de $I$, resp. $J$, est assimilé à une mesure de Dirac et est appelé *stratégie pure* du joueur 1, resp. joueur 2, dans $\Gamma$.
Le *support* d'une stratégie mixte $x$ du joueur 1, noté supp $(x)$, est l'ensemble des stratégies pures $i$ telles que $x^i > 0$.
On représentera souvent le jeu $G$ par la matrice $A$ avec $A_{ij} = g(i, j)$ pour tout $(i, j)$ dans $I \times J$. Un élément $x$ de $\Delta(I)$ sera alors vu comme une matrice ligne, et un élément $y$ de $\Delta(J)$ comme une matrice colonne, de façon à pouvoir écrire le paiement comme la forme bilinéaire $\gamma(x, y) = xAy$.

**Théorème 2.1** (Von Neumann , 1928). **Minmax**
*Soit $A$ une matrice réelle $I \times J$.*
*Il existe $(x^*, y^*, v)$ dans $\Delta(I) \times \Delta(J) \times \mathbb{R}$ tel que :*

(1) $$x^*Ay \geq v, \quad \forall y \in \Delta(J) \quad \text{et} \quad xAy^* \leq v, \ \forall x \in \Delta(I).$$

Autrement dit, l'extension mixte d'un jeu matriciel a une valeur (on dit aussi que tout jeu à somme nulle fini a une valeur en stratégies mixtes), et les joueurs y ont des stratégies optimales.
Le réel $v$ du théorème est unique, et correspond précisément à la valeur de la matrice $A$ :

$$v = \max_{x \in \Delta(I)} \min_{y \in \Delta(J)} xAy = \min_{y \in \Delta(J)} \max_{x \in \Delta(I)} xAy$$

que l'on note également $\mathtt{val}(A)$.
En tant qu'application de $\mathbb{R}^{I \times J}$ dans $\mathbb{R}$, l'opérateur val est continu, croissant et non

dilatant : $|\mathtt{val}(A) - \mathtt{val}(B)| \leq \|A - B\|_\infty$ (voir Chapitre 3, Section 3).

Il existe de nombreuses preuves du théorème du minmax. Une démonstration classique repose sur le théorème de dualité en programmation linéaire.
Les deux programmes :

$$(\mathcal{P}_1) \quad \begin{array}{c} \min < c, x > \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{array} \qquad (\mathcal{P}_2) \quad \begin{array}{c} \max < u, b > \\ uA \leq c \\ u \geq 0 \end{array}$$

sont duaux et ont même valeur dès qu'ils sont réalisables, i.e. si les ensembles $\{Ax \geq b; x \geq 0\}$ et $\{uA \leq c; u \geq 0\}$ sont non vides. Ce résultat est lui même une conséquence du théorème de l'alternative pour des systèmes linéaires (voir par exemple, Sorin (2002), App. A).
Preuve : On se ramène au cas où $A \gg 0$.
On considère les deux programmes duaux

$$(\mathcal{P}_1) \quad \begin{array}{c} \min < X, c > \\ XA \geq b \\ X \geq 0 \end{array} \qquad (\mathcal{P}_2) \quad \begin{array}{c} \max < b, Y > \\ AY \leq c \\ Y \geq 0 \end{array}$$

où les variables vérifient $X \in I\!R^m, Y \in I\!R^n$, et les paramètres sont donnés par $c \in I\!R^m, c_i = 1, \forall i$ et $b \in I\!R^n, b_j = 1, \forall j$.
$(\mathcal{P}_2)$ est réalisable avec $Y = 0$ et $(\mathcal{P}_1)$ en prenant $X$ assez grand, par hypothèse sur $A$.
Il existe donc un triplet $X^*, Y^*, w$ avec

$$X^* \geq 0, \; Y^* \geq 0, \; X^*A \geq b, \; AY^* \leq c, \qquad \sum_i X_i^* = \sum_j Y_j^* = w$$

$X^* \neq 0$ implique $w > 0$ soit en divisant par $w$, l'existence de $(x^*, y^*) \in \Delta(I) \times \Delta(J)$ avec

$$x^*Aj \geq 1/w, \forall j, \quad iAy^* \leq 1/w, \forall i.$$

La valeur existe et vaut $1/w$, $x^*$ et $y^*$ sont des stratégies optimales. ∎

Une preuve plus constructive du théorème de Von Neumann peut être obtenue en construisant un algorithme d'approchabilité (voir Exercice 2.4). Par ailleurs, on peut aussi utiliser le théorème de Loomis (Théorème 4.1) dont la preuve repose sur une récurrence sur la dimension.
Indiquons enfin que le théorème du Minmax de Von Neumann se généralise au cas où les paiements ne sont plus nécessairement réels mais appartiennent à un corps ordonné

(et alors la valeur est un élément du corps, Weyl, 1950) : on vérifie que l'ensemble défini par l'équation (1) est spécifié par un nombre fini d'inégalités linéaires larges.

## 3. Stratégies optimales

Soit un jeu matriciel défini par une matrice $A$ dans $\mathbb{R}^{I\times J}$.
On note $X(A)$ (resp. $Y(A)$) le sous-ensemble de $\Delta(I)$ (resp. $\Delta(J)$) formé des stratégies optimales du joueur 1 (resp. 2).
On rappelle qu'un polytope est l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points (ce qui équivaut en dimension finie à un ensemble borné, intersection d'un nombre fini de demi-espaces).

**Proposition 3.1.**

*a) $X(A)$ et $Y(A)$ sont des polytopes non vides.*

*b) Si $x \in X(A)$, $y \in Y(A)$, $i \in \operatorname{supp}(x)$ et $j \in \operatorname{supp}(y)$, alors $iAy = v$ et $xAj = v$ (complémentarité).*

*c) Il existe un couple de stratégies optimales $(x^*, y^*)$ dans $X(A) \times Y(A)$ satisfaisant la propriété de complémentarité forte :*

$$\forall i \in I, \big(x^{*i} > 0 \Longleftrightarrow iAy^* = v\big) \quad \text{et } \forall j \in J, \quad \big(y^{*j} > 0 \Longleftrightarrow x^*Aj = v\big).$$

*d) $X(A) \times Y(A)$ est l'ensemble des points-selle de $A$ : éléments $(x^*, y^*)$ de $\Delta(I) \times \Delta(J)$ tels que :*

$$x\,A\,y^* \leq \; x^*\,A\,y^* \leq \; x^*\,A\,y \qquad \forall (x,y) \in \Delta(I) \times \Delta(J).$$

Preuve : Les démonstrations de $a$), $b$), et $d$) sont des conséquences élémentaires des définitions et du théorème du minmax. La propriété $d$) est en fait vraie pour tout jeu à somme nulle (elle correspond à l'identité entre les couples de stratégies optimales et les *équilibres de Nash* (voir le Chapitre 4) d'un jeu à somme nulle).

L'assertion $c$) correspond à la propriété de complémentarité forte en programmation linéaire et est une conséquence du théorème de l'alternative. ∎

## 4. Extensions

L'extension suivante du théorème de von Neumann est due à Loomis.

**Théorème 4.1** (Loomis , 1946).
*Soient $A$ et $B$ deux matrices réelles $I \times J$, avec $B \gg 0$. Il existe $(x, y, v)$ dans $\Delta(I) \times \Delta(J) \times \mathbb{R}$ tel que :*

$$xA \geq v \;\; xB \;\text{ et }\; Ay \leq v \;\; By.$$

Si $B_{ij} = 1$ pour tout $(i,j) \in I \times J$, on retrouve le théorème de Von Neumann. Réciproquement, on peut donner une preuve élémentaire du théorème de Loomis à partir de celui de Von Neumann : l'application : $t \in \mathbb{R} \mapsto \mathtt{val}(A - tB)$, est continue (strictement décroissante) et a pour limites $+\infty$ en $-\infty$, et $-\infty$ en $+\infty$. Il existe donc un réel $v$ tel que $\mathtt{val}(A - vB) = 0$, et il convient.
Voir l'Exercice 2.1 pour une preuve directe du théorème de Loomis.

Un exemple d'application du théorème de Von Neumann est le suivant :

**Corollaire 4.2.**
*Toute matrice stochastique admet une probabilité invariante.*

Preuve : Soit $A$ une matrice stochastique dans $\mathbb{R}^{I\times J}$ : $I = J$, $A_{ij} \geq 0$ et $\sum_{j\in I} A_{ij} = 1, \forall i \in I$. Notons $B = A - Id$, où $Id$ est la matrice identité, et plaçons-nous dans le jeu défini par $B$. Considérons tout d'abord la stratégie uniforme $y^*$ du joueur 2. Elle garantit 0, donc la valeur de $B$ est négative. De plus, contre n'importe quelle stratégie mixte $y$ du joueur 2, jouer une ligne $i$ telle que $y^i = \min_{j\in I} y^j$ donne un paiement positif au joueur 1, donc le joueur 2 ne peut pas se garantir une quantité strictement négative. Par conséquent la valeur de $B$ est nulle.
Une stratégie optimale $x^*$ du joueur 1 dans $B$ vérifie $x^*A - x^* \geq 0$, et en considérant le produit par $y^*$ on obtient l'égalité sur toutes les composantes d' où $x^*A = x^*$ (ou par complémentarité). ∎

Le théorème de Von Neumann permet de montrer l'existence de la valeur dans le cas continu suivant, où $\Delta([0,1])$ dénote l'ensemble des probabilités boréliennes sur $[0,1]$.

**Théorème 4.3** (Ville , 1938).
*Soient $I = J = [0,1]$, et $f$ une fonction réelle continue sur $I \times J$. L'extension mixte $(\Delta(I), \Delta(J), f)$ possède une valeur et chaque joueur a une stratégie optimale. De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, chaque joueur a une stratégie $\varepsilon$-optimale à support fini.*

(En particulier toute extension mixte du jeu $(I, J, f)$ a la même valeur.)
Voir l'Exercice 2.3 pour la preuve : on procède par discrétisations de plus en plus fines du carré $[0,1] \times [0,1]$, et on extrait une sous-suite faiblement convergente d'une suite de stratégies à support fini.
L'Exercice 3.7 montre que l'hypothèse $f$ continue n'est pas superflue dans l'énoncé du théorème de Ville.

## 5. Exemples

Exemple 1.

| | |
|---|---|
| 1 | -2 |
| -1 | 3 |

Ici $v = 1/7$. Le joueur 1 a une unique stratégie optimale : jouer Haut avec probabilité 4/7, et Bas avec probabilité 3/7. Le joueur 2 a une unique stratégie optimale : jouer Gauche avec probabilité 5/7, et Droite avec probabilité 2/7.

Exemple 2.

| | |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 0 | $x$ |

Quel que soit $x$, le jeu a une valeur $v = 1$, et chaque joueur a une unique stratégie optimale, qui est pure : Haut pour le joueur 1, Gauche pour le joueur 2.

Exemple 3.

| | |
|---|---|
| $a$ | $b$ |
| $c$ | $d$ |

Dans le cas général à 2 actions par joueur, soit il existe un couple de stratégies optimales pures (et alors la valeur est un des nombres $\{a, b, c, d\}$) et sinon les stratégies optimales sont complètement mixtes et la valeur vaut :

$$v = \frac{ad - bc}{a + d - b - c}.$$

## 6. Fictitious play

Soit $A$ une matrice réelle $I \times J$. Le processus suivant, appelé *fictitious play*, a été introduit par Brown (1951). Imaginons des joueurs jouant de façon répétée le jeu matriciel $A$. A chaque étape, chacun des joueurs calcule la moyenne empirique des actions jouées par son adversaire dans le passé, et joue une meilleure réponse pure face à cette moyenne.

Explicitement, on part de $(i_1, j_1)$ arbitraire dans $I \times J$, et à chaque étape $n$ on considère $x_n = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} i_t$, vu comme un élément de $\Delta(I)$, et de même pour $y_n = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} j_t$ dans $\Delta(J)$.

**Définition 6.1.** *Une suite $(i_n, j_n)_{n\geq 1}$ à valeurs dans $I \times J$ est une réalisation d'un processus de fictitious play pour la matrice $A$ si : pour tout $n \geq 1$, $i_{n+1}$ est une meilleure réponse du joueur 1 contre $y_n$ dans $A$, et $j_{n+1}$ est une meilleure réponse du joueur 2 contre $x_n$ dans $A$.*

**Théorème 6.2** (Robinson, 1951 ).
*Soit $(i_n, j_n)_{n\geq 1}$ une réalisation d'un processus de fictitious play pour la matrice $A$.*

*Alors la distance entre $(x_n, y_n)$ et l'ensemble des couples de stratégies optimales de $A$ tend vers 0, quand $n \to \infty$. Explicitement :*
$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, \forall x \in \Delta(I), \forall y \in \Delta(J)$,

$$x_n A y \geq \texttt{val}(A) - \varepsilon \text{ et } x A y_n \leq \texttt{val}(A) + \varepsilon.$$

*De plus le paiement moyen sur la trajectoire, soit* $\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} A_{i_t, j_t}$, *converge vers* $\texttt{val}(A)$.

Nous allons illustrer la preuve en passant en temps continu.
Prenons comme variables les fréquences empiriques $x_n$ et $y_n$, donc la dynamique discrète s'écrit (pour la composante du joueur 1) :

$$x_{n+1} = \frac{1}{n+1}(i_{n+1} + n x_n)$$

et satisfait :

$$x_{n+1} - x_n \in \frac{1}{n+1}[BR^1(y_n) - x_n]$$

où $BR^1$ dénote la correspondance de meilleure réponse du joueur 1 (voir Chapitre 1, Section 3).
Le système analogue en temps continu est alors :

$$\dot{x}(t) \in \frac{1}{t}\left[BR^1(y(t)) - x(t)\right].$$

C'est une inclusion différentielle qui correspond, avec la condition similaire pour le joueur 2, au processus CFP : *continuous fictitious play.*

**Proposition 6.3** (Harris, 1998 ; Hofbauer et Sorin, 2006).
*Pour le processus CFP, il y a convergence du saut de dualité vers 0 à la vitesse $1/t$.*

Preuve : (Nous supposons l'existence d'une solution au processus CFP). On effectue le changement de temps $z(t) = x(\exp(t))$ qui ramène aux inclusions différentielles :

$$\dot{x}(t) \in \left[BR^1(y(t)) - x(t)\right], \text{ et } \dot{y}(t) \in \left[BR^2(x(t)) - y(t)\right].$$

Ceci correspond à la dynamique de meilleure réponse (Gilboa et Matsui, 1991).
Notons le paiement $F(x,y) = xAy$, et pour $(x,y)$ dans $\Delta(I) \times \Delta(J)$, posons $L(y) = \max_{x' \in \Delta(I)} F(x', y)$ et $M(x) = \min_{y' \in \Delta(J)} F(x, y')$.
Donc le *saut de dualité* associé au couple $(x,y)$ est : $W(x,y) = L(y) - M(x) \geq 0$ et le couple $(x,y)$ est une paire de stratégies optimales dans $A$ si et seulement si $W(x,y) = 0$.
Soit maintenant $(x(t), y(t))_{t \geq 0}$ une solution de CFP.
On note $w(t) = W(x(t), y(t))$ l'évaluation du saut de dualité sur la trajectoire,

$\alpha(t) = x(t) + \dot{x}(t) \in BR^1(y(t))$ et $\beta(t) = y(t) + \dot{y}(t) \in BR^2(x(t))$.
On a $L(y(t)) = F(\alpha(t), y(t))$, d'où

$$\frac{d}{dt}L(y(t)) = \dot{\alpha}(t)D_1F(\alpha(t), y(t)) + \dot{y}(t)D_2F(\alpha(y), y(t)).$$

Le théorème de l'enveloppe (voir par exemple, Mas Colell, Whinston and Green, 1995, p. 964) montre que le premier terme est nul et le second terme vaut $F(\alpha(t), \dot{y}(t))$ (par linéarité de $F$ par rapport à la seconde variable).
On obtient donc :

$$\begin{aligned}
\dot{w}(t) &= \frac{d}{dt}L(y(t)) - \frac{d}{dt}M(x(t)) \\
&= F(\alpha(t), \dot{y}(t)) - F(\dot{x}(t), \beta(t)) \\
&= F(x(t), \dot{y}(t)) - F(\dot{x}(t), y(t)) \\
&= F(x(t), \beta(t)) - F(\alpha(t), y(t)) \\
&= M(x(t)) - L(y(t)) \\
&= -w(t).
\end{aligned}$$

soit : $w(t) = w(0)e^{-t}$. Il y a convergence de $w(t)$ vers 0 à vitesse exponentielle, et donc convergence vers 0 à vitesse $1/t$ dans le problème initial avant changement de temps.
La convergence vers 0 du saut de dualité implique par continuité la convergence de $(x(t), y(t))$ vers l'ensemble des stratégies optimales. ∎

Preuve du Théorème

Remarquons que par compacité des ensembles de stratégies mixtes, on obtient l'existence de stratégies optimales dans le jeu matriciel (points d'accumulation des trajectoires). On retrouve donc le théorème du minmax, à partir de l'existence d'une solution au processus CFP.
Le résultat est en fait plus fort : l'ensemble des stratégies optimales est un attracteur global pour la dynamique de meilleure réponse, ce qui implique la convergence de la version discrète en temps, donc du processus de fictitious play (Hofbauer and Sorin, 2006).
Considérons enfin la somme des paiements réalisés : $R_n = \sum_{p=1}^{n} F(i_p, j_p)$. En posant $U_m^i = \sum_{k=1}^{m} F(i, j_k)$ on obtient

$$R_n = \sum_{p=1}^{n}(U_p^{i_p} - U_{p-1}^{i_p}) = \sum_{p=1}^{n} U_p^{i_p} - \sum_{p=1}^{n-1} U_p^{i_{p+1}} = U_n^{i_n} + \sum_{p=1}^{n-1}(U_p^{i_p} - U_p^{i_{p+1}})$$

mais la propriété de fictitious play implique

$$U_p^{i_p} - U_p^{i_p+1} \leq 0.$$

Donc

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{R_n}{n} \leq \limsup_{n\to\infty} \max_i \frac{U_n^i}{n} \leq \mathtt{val}(A)$$

car $\frac{U_n^i}{n} = F(i, y_n) \leq \mathtt{val}(A) + \epsilon$ pour $n$ assez grand puisque $y_n$ tend vers $Y(A)$ par le résultat établi précédemment.

L'inégalité duale implique alors le résultat.

■

CHAPITRE 3

# Jeux à somme nulle : le cas général

On considère ici des jeux à somme nulle généraux. Comme dans le théorème de Von Neumann, on appelle théorème de minmax un résultat donnant des conditions suffisantes d'existence de la valeur.

## 1. Le théorème de Sion

Le lemme suivant, appelé lemme de l'intersection (voir Berge, 1966, p.172), sera utile par la suite.

**Lemme 1.1.**
*Soient $C_1, \ldots, C_n$ des convexes compacts non vides d'un espace euclidien. On suppose que l'union $\cup_{i=1}^n C_i$ est convexe, et que pour tout $j = 1, \ldots, n$, l'intersection $\cap_{i \neq j} C_i$ est non vide. Alors l'intersection totale $\cap_{i=1}^n C_i$ est non vide.*

Preuve : C'est clair pour $n = 1$. Soit $n \geq 2$, supposons le résultat vrai pour $n-1$ et faux pour $n$. Soient $C_1, \ldots, C_n$ satisfaisant les hypothèses et tels que $\cap_{i=1}^n C_i = \emptyset$. Alors $C_n$ et $\cap_{i=1}^{n-1} C_i$, noté $D_n$, sont des convexes compacts non vides disjoints. Par le théorème de Hahn-Banach on peut les séparer strictement par un hyperplan fermé $H$. Pour $i = 1, \ldots, n-1$, on pose $\tilde{C}_i = C_i \cap H$ et $\tilde{C} = (\cup_{i=1}^n C_i) \cap H$, qui sont donc convexes et compacts. Comme $C_n \cap H = \emptyset = D_n \cap H$, on a $\cup_{i=1}^{n-1} \tilde{C}_i = \tilde{C}$ et $\cap_{i=1}^{n-1} \tilde{C}_i = \emptyset$. Par hypothèse de récurrence appliquée à l'ordre $n-1$ aux $\tilde{C}_i$, il existe $j$ dans $\{1, \ldots, n-1\}$ tel que $\cap_{i \neq j,n} \tilde{C}_i = \emptyset$. Posons $K = \cap_{i \neq j,n} C_i$, on a $D_n \subset K$ et $C_n \cap K \neq \emptyset$. Comme $K$ est convexe et intersecte des ensembles séparés par l'hyperplan $H$, $K \cap H \neq \emptyset$. Mais $K \cap H = \cap_{i \neq j,n} \tilde{C}_i = \emptyset$, d'où la contradiction. ∎

**Remarque** : La preuve n'utilisant que le théorème de séparation stricte de Hahn-Banach, le résultat est vrai dans tout espace où ce théorème s'applique (comme les espaces vectoriels topologiques localement convexes séparés).

Avant d'énoncer le théorème de minmax de Sion, on introduit les définitions suivantes.

**Définition 1.2.** *Une application $f : E \to \mathbb{R}$, où $E$ est convexe, est quasi-concave si pour tout réel $\lambda$, la section supérieure large $\{x \in E, f(x) \geq \lambda\}$ est convexe. $f$ est quasi-convexe si $-f$ est quasi-concave.*
*D'autre part, si $E$ est un espace topologique, une application $f : E \to \mathbb{R}$ est semi-continue supérieurement (s.c.s.) si pour tout réel $\lambda$, la section supérieure large $\{x \in E, f(x) \geq \lambda\}$ est fermée. $f$ est semi-continue inférieurement (s.c.i.) si $-f$ est s.c.s.*
*Il est clair que si $E$ est compact et $f$ s.c.s., alors $f$ atteint son maximum sur $E$.*

Dans les théorèmes suivants, les ensembles de stratégies $S$ et $T$ sont des sous-ensembles de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels topologiques séparés.

**Théorème 1.3** (Sion, 1958).
*Soit un jeu à somme nulle $G = (S, T, g)$ tel que :*
*(i) $S$ et $T$ sont convexes,*
*(ii) $S$ ou $T$ est compact,*
*(iii) pour tout $t$ dans $T$, $g(., t)$ est quasi-concave s.c.s. en $s$, et pour tout $s$ dans $S$, $g(s, .)$ est quasi-convexe s.c.i. en $t$.*
*Alors $G$ a une valeur :*

$$\sup_{s \in S} \inf_{t \in T} g(s,t) = \inf_{t \in T} \sup_{s \in S} g(s,t).$$

*De plus, si $S$ (resp. $T$) est compact, les suprema (resp. infima) ci-dessus sont atteints : le joueur correspondant possède une stratégie optimale.*

Preuve : Supposons par exemple $S$ compact, et que $G$ n'a pas de valeur. Alors il existe un réel $v$ tel que : $\sup_{s \in S} \inf_{t \in T} g(s,t) < v < \inf_{t \in T} \sup_{s \in S} g(s,t)$. Et donc :

$$\forall s \in S,\ \exists t \in T,\ g(s,t) < v,$$

$$\forall t \in T,\ \exists s \in S,\ g(s,t) > v.$$

On se ramène au cas où $S$ et $T$ sont des polytopes, puis on applique le lemme de l'intersection.
Posons, pour tout $t$ dans $T$, $S_t = \{s \in S,\ g(s,t) < v\}$. La famille $(S_t)_{t \in T}$ forme un recouvrement ouvert du compact $S$, dont on peut extraire un sous-recouvrement fini : $S \subset \cup_{t \in T_0} S_t$, avec $T_0$ fini.
L'enveloppe convexe $T' = \text{conv}\,(T_0)$ est compacte (homéomorphe au simplexe sur $T_0$, en dimension finie, il n'y a qu'une topologie d'espace vectoriel topologique séparé) et l'on a encore : $\sup_{s \in S} \inf_{t \in T'} g(s,t) < v$ car bien sûr $S \subset \cup_{t \in T'} S_t$ et $v < \inf_{t \in T'} \sup_{s \in S} g(s,t)$ car l'inf est pris sur un ensemble plus petit.

Comme plus haut, la famille $(T'_s = \{t \in T', g(s,t) > v\})_{s \in S}$ forme un recouvrement ouvert de $T'$. On peut donc aussi trouver un sous-ensemble fini $S_0$ de $S$ tel que :

$$\forall s \in \text{conv}\,(S_0),\ \exists t \in T_0,\ g(s,t) < v,$$

$$\forall t \in \text{conv}\,(T_0),\ \exists s \in S_0,\ g(s,t) > v.$$

Quitte à enlever des éléments à $S_0$ et $T_0$, on peut supposer sans perte de généralité que $(S_0, T_0)$ est minimal pour l'inclusion (dans l'ensemble des couples $(A, B)$ où $A$ et $B$ sont des sous-ensembles non vides de $S$ et $T$ satisfaisant l'analogue des deux dernières conditions).
Pour $s$ dans $S_0$, notons maintenant $A_s = \{t \in \text{conv}\,(T_0),\ g(s,t) \leq v\}$. $A_s$ est un sous-ensemble convexe compact de conv $(T_0)$. On a $\cap_{s \in S_0} A_s = \emptyset$ et pour tout $s_0$ dans $S_0$, $\cap_{s \in S_0 \setminus \{s_0\}} A_s \neq \emptyset$ par minimalité de $S_0$. Par conséquent, le lemme de l'intersection implique que l'ensemble $\cup_{s \in S_0} A_s$ n'est pas convexe.
Il existe alors $t_0 \in \text{conv}\,(T_0) \setminus \cup_{s \in S_0} A_s$, et donc $g(s, t_0) > v$, pour tout $s \in S_0$. Puisque $g(., t_0)$ est quasi-concave, on a également : $g(s, t_0) > v$, pour tout $s \in \text{conv}\,(S_0)$. On montre de même l'existence de $s_0 \in \text{conv}\,(S_0)$ tel que $g(s_0, t) < v$, pour tout $t \in \text{conv}\,(T_0)$, d'où la contradiction en évaluant $g(s_0, t_0)$.

L'existence de stratégie optimale vient simplement du fait que $S$ est compact et l'application : $s \mapsto \inf_{t \in T} g(s,t)$ est s.c.s. ∎

En renforçant l'hypothèse de convexité sur $g(s, .)$, on peut affaiblir les hypothèses topologiques. Dans le résultat suivant, on ne considère en fait aucune topologie sur $T$.

**Proposition 1.4.**
*Soit un jeu à somme nulle $G = (S, T, g)$ tel que :*
*(i) $S$ est convexe compact,*
*(ii) $T$ est convexe,*
*(iii) pour tout $t$ dans $T$, $g(., t)$ est quasi-concave s.c.s., et pour tout $s$ dans $S$, $g(s, .)$ est convexe.*

*Alors $G$ a une valeur : $\sup_{s \in S} \inf_{t \in T} g(s,t) = \inf_{t \in T} \sup_{s \in S} g(s,t)$, et le joueur 1 a une stratégie optimale.*

Preuve : Supposons qu'il existe un réel $v$ vérifiant : $\sup_{s \in S} \inf_{t \in T} g(s,t) < v < \inf_{t \in T} \sup_{s \in S} g(s,t)$. Comme dans la preuve du théorème de Sion, il est d'abord possible de trouver un ensemble fini $T_0 = \{t_1, .., t_J\} \subset T$ tel que : $\forall s \in S$, $\exists t \in T_0$, $g(s,t) < v$.

On munit l'espace affine engendré par les éléments de $T_0$ d'une norme, et on note

int(conv $(T_0)$) l'intérieur relatif de conv $(T_0)$. Pour tout $s$ dans $S$, $g(s,.)$ est convexe, donc est continue sur int(conv $(T_0)$) (une fonction convexe définie sur un ouvert d'un espace euclidien y est continue, voir par exemple Berge (1966), Théorème 7, p. 203). Fixons $t_0$ dans int(conv $(T_0)$) et posons pour tout $n \geq 1$ et $j \in \{1,..,J\}$ : $t_j^n = \frac{1}{n}t_0 + (1-\frac{1}{n})t_j$ et $S_{t_j}^n = \{s \in S, g(s,t_j^n) < v\}$. Pour tous $j$, $n$, par convexité de $g(s,.)$, on a $g(s,t_j^n) \leq \frac{1}{n}g(s,t_0) + (1-\frac{1}{n})g(s,t_j)$. Donc les ensembles $S_{t_j}^n$ forment un recouvrement ouvert de $S$. On peut donc trouver un sous-ensemble fini $T_1$ de int(conv $(T_0)$) tel que :

$$\forall s \in S,\ \exists t \in T_1, \quad g(s,t) < v,$$

$$\forall t \in \text{conv}\,(T_1),\ \exists s \in S, \quad g(s,t) > v.$$

Maintenant, puisque $g(s,.)$ est continue sur conv $(T_1)$ pour tout $s$ dans $S$ et que $g(.,t)$ est s.c.s,

$$\max_{s\in S}\ \min_{t\in \text{conv}\,(T_1)} g(s,t) < \min_{t\in \text{conv}\,(T_1)}\ \max_{s\in S} g(s,t).$$

Ceci contredirait le théorème de Sion, et donc $G$ a une valeur.
Comme précédemment, l'application : $s \mapsto \inf_{t\in T} g(s,t)$ étant s.c.s., le joueur 1 a une stratégie optimale (mais pas nécessairement le joueur 2). ∎

## 2. Théorèmes de minmax en stratégies mixtes

On considère ici des jeux sans hypothèse de convexité sur les espaces de stratégies. On est amené à convexifier un ensemble $X$ soit en prenant $\Delta_f(X)$, l'ensemble des probabilités sur $X$ à support fini (c'est conv $X$ l'enveloppe convexe de $X$), soit dans le cas topologique ($X$ métrique compact) en considérant $\Delta(X)$ l'ensemble des probabilités Boréliennes sur $X$. Rappelons que dans ce cadre $\Delta(X)$ est muni de la topologie faible $*$ ($\mu_n$ converge $*$-faiblement vers $\mu$ si $\int_X \phi\, d\mu_n \to \int_X \phi\, d\mu$ pour toute fonction réelle $\phi$ continue sur $X$). Alors $\Delta(X)$ est lui-même compact métrique et si $\phi$ est s.c.s. sur $X$, $\hat{\phi} : \mu \mapsto \int_X \phi\, d\mu$ est s.c.s. sur $\Delta(X)$, (Billingsley, 1999 ; Parthasarathy, 1967).
On peut tout d'abord montrer le résultat suivant à l'aide de la proposition 1.4.

**Proposition 2.1.**
*Soit un jeu à somme nulle $(S,T,g)$ tel que :*
*(i) $S$ est un espace topologique métrique compact,*
*(ii) pour tout $t$ dans $T$, $g(.,t)$ est s.c.s..*
*Alors le jeu $(\Delta(S), \Delta_f(T), g)$ a une valeur et le joueur 1 a une stratégie optimale.*

Preuve : Il suffit de remarquer que si $S$ est compact et $g(.,t)$ s.c.s., alors $\Delta(S)$ est compact et $\sigma \mapsto g(\sigma,t) = \int_S g(s,t)\sigma(ds)$ est s.c.s..

Par ailleurs $g(\sigma, \tau)$ est bien définie sur $\Delta(S) \times \Delta_f(T)$ et est bilinéaire. Donc les conditions de la Proposition 1.4 s'appliquent. ∎

Le théorème suivant est le théorème de minmax classique en stratégies mixtes. On suppose la fonction de paiements bornée (et mesurable) afin de pouvoir appliquer le théorème de Fubini et ainsi définir l'extension mixte du jeu.

**Théorème 2.2.**
*Soit un jeu à somme nulle $G = (S, T, g)$ tel que :*
*(i) $S$ et $T$ sont métriques compacts,*
*(ii) pour tout $t$ dans $T$, $g(., t)$ est s.c.s., et pour tout $s$ dans $S$, $g(s, .)$ est s.c.i.*
*(iii) $g$ est bornée et mesurable par rapport à la tribu Borélienne produit $\mathcal{B}_S \otimes \mathcal{B}_T$.*
*Alors l'extension mixte de $G$ a une valeur. Chaque joueur a une stratégie optimale mixte, et pour tout $\varepsilon > 0$, chaque joueur a une stratégie $\varepsilon$-optimale à support fini.*

Preuve : On applique la Proposition 2.1 respectivement aux jeux $G^+ = (\Delta(S), \Delta_f(T), g)$ et $G^- = (\Delta_f(S), \Delta(T), g)$ qui induisent des valeurs $v^+$ et $v^-$ avec bien sûr $v^- \leq v^+$. Soit $\sigma$ (resp. $\tau$) une stratégie optimale pour 1 dans $G^+$ (resp. 2 dans $G^-$). On obtient :

$$\int_S g(s,t)\sigma(ds) \geq v^+, \quad \forall t \in T$$

$$\int_T g(s,t)\tau(dt) \leq v^-, \quad \forall s \in S.$$

D'où en utilisant le théorème de Fubini :

$$v^+ \leq \int\int_{S\times T} g(s,t)\sigma(ds)\tau(dt) \leq v^-$$

et le résultat suit. ∎

## 3. Convexité

Les résultats du paragraphe précédent peuvent être également obtenus à partir d'un théorème de séparation en dimension finie.

**Proposition 3.1.**
*Soit un jeu à somme nulle $(S, T, g)$ tel que :*
*(i) $S$ est un espace mesurable et $X$ un ensemble convexe de probabilités sur $S$,*
*(ii) $T$ est fini,*
*(iii) $g$ est mesurable et bornée.*
*Alors le jeu $(X, \Delta(T), g)$ a une valeur.*

Preuve : Soit $\underline{v} = \sup_X \inf_T g(x,t)$ et $D = \{a \in I\!R^T : \exists x \in X, g(x,t) = \int_X g(s,t)x(ds) = a_t, \forall t \in T\}$. On note que $D$ est convexe et a une intersection vide avec le convexe $C = \{a \in I\!R^T; a_t \geq \underline{v} + \varepsilon, \forall t \in T\}$, pour tout $\varepsilon > 0$.
Par le théorème de séparation faible (en dimension finie) on en déduit l'existence d'un vecteur $b \in I\!R^T$, non nul et tel que :

$$\langle b, d\rangle \leq \langle b, c\rangle, \qquad \forall c \in C, \forall d \in D.$$

$C$ est positivement compréhensif d'où $b > 0$ et en normalisant on obtient $y \in \Delta(T)$ avec :

$$g(x,y) = \sum\nolimits_t \int_S g(s,t)x(ds)y_t \leq \underline{v} + \varepsilon, \quad \forall x \in X.$$

Donc $\overline{v} \leq \underline{v} + \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$, d'où l'égalité et par compacité l'existence d'une stratégie optimale pour 2. ∎

### 4. Opérateur valeur et jeu dérivé

Fixons ici les ensembles de stratégies $S$ et $T$ et considérons un ensemble $\mathcal{F}$ de fonctions réelles définies sur $S \times T$, tel que :
$\mathcal{F}$ est un cône convexe ($\mathcal{F}$ est stable par addition et mutliplication par un réel positif, et $0 \in \mathcal{F}$),
et pour tout $f$ dans $\mathcal{F}$ le jeu $(S, T, f)$ a une valeur notée $\mathtt{val}_{S\times T}(f)$ ou plus simplement $\mathtt{val}(f)$.

Clairement, l'opérateur val est :
1) *monotone* : $f \leq g \Rightarrow \mathtt{val}(f) \leq \mathtt{val}(g)$, et
2) il translate les constantes : $\forall t \in I\!R, \mathtt{val}(f + t) = \mathtt{val}(f) + t$.
On en déduit facilement :

**Proposition 4.1.**
*L'opérateur* val *est non dilatant :*

$$|\mathtt{val}(f) - \mathtt{val}(g)| \leq \|f - g\|_\infty$$

(*avec* $\|f - g\|_\infty =_{def} sup_{S\times T}|f(s,t) - g(s,t)|$).

La proposition suivante étend la version du cas fini, due à Mills (1956).

**Proposition 4.2** (Rosenberg and Sorin, 2001).
*Soient $S$ et $T$ des métriques compacts, $f$ et $g$ des fonctions réelles définies sur $S \times T$. On suppose que pour tout $\alpha \geq 0$, les fonctions $g$ et $f + \alpha g$ sont s.c.s. en $s$ et s.c.i. en $t$, et que le jeu $(S, T, f + \alpha g)$ a une valeur $\mathtt{val}_{S\times T}(f + \alpha g)$. Alors*

$$\lim_{\alpha \to 0^+} \frac{1}{\alpha} [\mathtt{val}_{S\times T}(f + \alpha g) - \mathtt{val}_{S\times T}(f)] \quad \textit{existe}$$

*et cette limite vaut :*

$$\mathtt{val}_{S(f)\times T(f)}(g),$$

*où $S(f)$ et $T(f)$ sont les ensembles des stratégies optimales dans le jeu $(S,T,f)$.*

Preuve : Les hypothèses impliquent l'existence de $s_\alpha \in S(f+\alpha g)$ et de $t \in T(f)$. On a :

$$\alpha g(s_\alpha,t) = [f+\alpha g](s_\alpha,t) - f(s_\alpha,t) \geq \mathtt{val}_{S\times T}(f+\alpha g) - \mathtt{val}_{S\times T}(f).$$

Donc :

$$\inf_{T(f)} g(s_\alpha,t) \geq \frac{1}{\alpha}\left[\mathtt{val}_{S\times T}(f+\alpha g) - \mathtt{val}_{S\times T}(f)\right]$$

et

$$\limsup_{\alpha\to 0^+} \inf_{T(f)} g(s_\alpha,t) \geq \limsup_{\alpha\to 0^+} \frac{1}{\alpha}\left[\mathtt{val}_{S\times T}(f+\alpha g) - \mathtt{val}_{S\times T}(f)\right].$$

Soit $s^*$ un point d'accumulation de la famille $s_\alpha$ quand $\alpha$ tend vers 0 sur une suite réalisant la lim sup. Puisque $g$ est s.c.s. en $s$

$$\inf_{T(f)} g(s,t) \geq \limsup_{\alpha\to 0^+} \inf_{T(f)} g(s_\alpha,t).$$

On note que $s^* \in S(f)$ ($S$ est compact et $f+\alpha g$ s.c.s. en $s$) d'où :

$$\sup_{S(f)} \inf_{T(f)} g(s,t) \geq \limsup_{\alpha\to 0^+} \frac{1}{\alpha}\left[\mathtt{val}_{S\times T}(f+\alpha g) - \mathtt{val}_{S\times T}(f)\right]$$

et le résultat suit par une inégalité duale. ∎

Le jeu $(S(f),T(f),g)$ est appelé *jeu dérivé* de $f$ dans la direction $g$.

CHAPITRE 4

# Jeux à $n$ joueurs : rationalité et équilibre de Nash

## 1. Notations

Soit $G = (N, (S^i)_{i\in N}, (g^i)_{i\in N})$ un jeu sous forme stratégique. $N$ est l'ensemble des joueurs (de cardinal noté $N$ s'il n'y a pas de confusion). $S^i$, $i \in N$, est l'ensemble des stratégies (pures) du joueur $i$. On suppose que $S^i$ est un sous ensemble d'un espace vectoriel topologique localement convexe et séparé. $g^i : S = \prod_{j\in N} S^j \to I\!R$ est la fonction de gain du joueur $i$, qui est supposée bornée, $\forall i \in N$.
$G$ est *compact* (resp. fini, de dimension finie) si les $S^i$ le sont pour tout $i \in N$.
$G$ est *continu* si les $g^i$ le sont pour tout $i \in N$.
$G$ est *quasi-concave* si les $S^i$ sont convexes et les $g^i$ sont quasi-concaves en $S^i$ pour tout $i \in N$.

## 2. Dominance

On considère ici un jeu fini et son extension mixte.
On rappelle qu'une stratégie $s^i \in S^i$ est strictement dominée s'il existe $\sigma^i \in \Delta(S^i)$ tel que pour tout $t^{-i} \in S^{-i}$, $g^i(\sigma^i, t^{-i}) > g^i(s^i, t^{-i})$.
Une stratégie $s^i$ n'est jamais meilleure réponse à une stratégie mixte s'il n'existe pas $\tau^{-i} \in \Pi_{j\neq i}\Delta(S^j)$, tel que $s^i \in BR^i(\tau^{-i})$.
Une *stratégie corrélée* de $-i$ est un élement $\theta^{[-i]} \in \Delta(S^{-i})$. (Noter que $\theta^{[-i]}$ n'est pas un vecteur produit). Le paiement correspondant est défini dans $I\!R^N$ par $g(s^i, \theta^{[-i]}) = \sum_{s^{-i}} \theta^{[-i]}(s^{-i}) g(s^i, s^{-i})$. Une stratégie $s^i$ n'est jamais meilleure réponse à une stratégie corrélée s'il n'existe pas $\theta^{[-i]} \in \Delta(S^{-i})$ tel que $s^i \in BR^i(\theta^{[-i]})$.
Dès qu'il y a trois joueurs ou plus, une stratégie peut être une meilleure réponse à une stratégie corrélée sans être une meilleure réponse à une stratégie mixte :

$M^1$:

| | $L$ | $R$ |
|---|---|---|
| $T$ | 8 | 0 |
| $B$ | 0 | 0 |

$M^2$:

| | $L$ | $R$ |
|---|---|---|
| $T$ | 4 | 0 |
| $B$ | 0 | 4 |

$M^3$:

| | $L$ | $R$ |
|---|---|---|
| $T$ | 0 | 0 |
| $B$ | 0 | 8 |

$M^4$:

| | $L$ | $R$ |
|---|---|---|
| $T$ | 3 | 3 |
| $B$ | 3 | 3 |

Dans le jeu ci-dessus le joueur 1 choisit $T$ ou $B$, le joueur 2 $L$ ou $R$, le joueur 3 $M^i, i = 1, ..., 4$ et les paiements sont ceux du joueur 3. $M^2$ est une meilleure réponse du joueur 3 à $\frac{1}{2}(TL) + \frac{1}{2}(BR)$ mais n'est meilleure réponse à aucune stratégie mixte de $\{1, 2\}$.

**Proposition 2.1.**
*$s^i$ est strictement dominée si est seulement si elle n'est jamais meilleure réponse à une stratégie corrélée de $-i$.*

Preuve : Soit $s^i$ strictement dominée et $\sigma^i \in \Delta(S^i)$ tel que pour tout $t^{-i} \in S^{-i}$, $g^i(\sigma^i, t^{-i}) > g^i(s^i, t^{-i})$. Par linéarité, on déduit que $g^i(\sigma^i, \theta^{[-i]}) > g^i(s^i, \theta^{[-i]})$ pour tout $\theta^{[-i]} \in \Delta(S^{-i})$ : $s^i$ ne peut être meilleure réponse à une stratégie corrélée.

Inversement, supposons que $s^i$ ne soit jamais meilleure réponse à une stratégie corrélée. Considérons l'extension mixte du jeu matriciel $H$ à deux joueurs et à somme nulle où le joueur $i$ a comme ensemble de stratégies pures $S^i$ et joue contre l'équipe des joueurs $-i$ (pris comme un joueur) ayant comme ensemble de stratégies pures $S^{-i}$. La fonction de paiement de $i$ dans $H$ est $h^i(t^i, t^{-i}) = g^i(t^i, t^{-i}) - g^i(s^i, t^{-i})$. Puisque $s^i$ n'est jamais meilleure réponse à une stratégie corrélée dans $G$, la valeur de $H$ est strictement positive. Toute stratégie mixte optimale $\sigma^i$ du joueur $i$ dans $H$ dominera strictement $s^i$ dans $G$. ■

Une stratégie $s^i$ n'est jamais meilleure réponse à une stratégie complètement corrélée s'il n'existe pas $\theta^{[-i]} \in int(\Delta(S^{-i}))$ (i.e. telle que $\theta^{[-i]}(s^{-i}) > 0, \forall s^{-i}$) tel que $s^i \in BR^i(\theta^{[-i]})$.

**Proposition 2.2.**
*$s^i$ est faiblement dominée si et seulement si elle n'est jamais meilleure réponse à une stratégie complètement corrélée.*

Preuve : Si $s^i$ est faiblement dominée alors il existe $\sigma^i \in \Delta(S^i)$ tel que pour tout $t^{-i} \in S^{-i}$, $g^i(\sigma^i, t^{-i}) \geq g^i(s^i, t^{-i})$ avec au moins un cas où l'inégalité stricte. Par linéarité, on déduit que $g^i(\sigma^i, \theta^{[-i]}) > g^i(s^i, \theta^{[-i]})$ pour tout $\theta^{[-i]} \in int(\Delta(S^{-i}))$ : $s^i$ ne peut être meilleure réponse à une stratégie complètement corrélée.

Supposons que $s^i$ ne soit pas meilleure réponse à une stratégie complètement corrélée. Considérons le jeu matriciel $H$ comme dans la preuve précédente. Le joueur $i$ peut garantir 0 dans $H$ en jouant $s^i$, sa valeur est au moins 0.
Si la valeur est strictement positive, toute stratégie optimale dans $H$ domine strictement $s^i$ dans $G$ ce qui implique que $s^i$ n'est pas meilleure réponse à une stratégie corrélée.

Supposons maintenant que la valeur soit zéro, impliquant par là même que $s^i$ est optimale dans $H$. Puisque $s^i$ n'est pas meilleure réponse à une stratégie complètement corrélée, aucune stratégie optimale de l'équipe $-i$ ne peut être à support plein. (Rappelons que dans tout jeu fini à somme nulle, l'ensemble des stratégies optimales d'un joueur est convexe et qu'une stratégie pure est utilisée dans une stratégie optimale si et seulement si cette stratégie est optimale contre toutes les stratégies optimales de l'opposant (Chapitre 2, Proposition 3.1. c)). Soit $t^{-i} \in S^{-i}$ n'appartenant au support d'aucune stratégie optimale de $-i$. Il existe donc une stratégie $\sigma^i$ (optimale pour $i$ dans $H$) face à laquelle $t^{-i} \in S^{-i}$ n'est pas une meilleure réponse. Cela signifie que pour tout $s^{-i} \in S^{-i}$, $h^i(\sigma^i, s^{-i}) \geq 0$ et $h^i(\sigma^i, t^{-i}) > 0$. Donc $\sigma^i$ domine faiblement $s^i$ dans $G$. ∎

## 3. Rationalisabilité

Une stratégie $s^i$ qui n'est jamais meilleure réponse ne peut pas être jouée par un joueur qui maximise face à un profil de stratégies de ses adversaires : on dit qu'elle n'est pas *justifiable*. En particulier, une stratégie strictement dominée n'est pas justifiable.

Définissons inductivement l'ensemble des stratégies justifiables à l'étape 1 par :

$$S^i(1) = BR^i(S^{-i}) = \{s^i;\ \exists s^{-i} \in S^{-i},\ s^i \text{ est une meilleure réponse à } s^{-i}\}, \quad \forall i \in N,$$

puis $S^i(k+1) = BR^i(S^{-i}(k))$. En passant de $S(k)$ à $S(k+1)$, la procédure élimine les stratégies qui ne sont jamais meilleure réponse aux stratégies qui restent justifiables à l'étape $k$. On obtient une suite décroissante de limite $T^i = \cap_k S^i(k)$. Soit $T = \prod_i T^i$. Les éléments de $T$ sont les stratégies *rationalisables.*

**Proposition 3.1** (Bernheim, 1984 ; Pearce, 1984).
*Soit $G$ un jeu compact et continu. Alors $T$ est un compact non vide, point fixe de $BR$. C'est le plus grand ensemble $L \subset S$ tel que*

$$L \subset BR(L).$$

<u>Preuve</u> : La continuité du jeu implique la semi-continuité supérieure de la correspondance $BR$ et puisque le jeu est compact, chaque $S(k)$ est compact. On obtient ainsi une suite emboîtée de compacts non vides qui converge vers $T$ compact non vide. Par ailleurs $T \subset S(k+1) = BR(S(k))$. Donc $T \subset \lim_{k\to\infty} BR(S(k)) \subset BR(T)$. Enfin $T \subset S(k)$ implique $BR(T) \subset BR(S(k)) = S(k+1)$. En passant à la limite on déduit que $BR(T) \subset T$.

Soit maintenant $L$ tel que $L \subset BR(L)$. Puisque $L \subset S$ et $L \subset BR(L)$ nous ob-

tenons, $L \subset BR(S) = S(1)$. Inductivement, $L \subset S(k)$ et $L \subset BR(L)$ impliquent $L \subset BR(S(k)) = S(k+1)$. En passant à la limite nous en déduisons que $L \subset T$.

■

**Remarques**

- La Proposition 2.1 montre le lien de cette procédure avec l'élimination itérée de stratégies strictement dominées.
- Il est par ailleurs instructif de préciser les hypothèses sur les connaissances des joueurs (sur l'état et sur le monde) pour établir le fait qu'ils puissent se livrer à cette réduction à des stratégies rationalisables.
- On pourra comparer aux orbites de trajectoires de meilleure réponse dans le cadre de jeux d'évolution.

## 4. Equilibre de Nash

Un *équilibre* (de Nash) est un profil de stratégies $s \in S$ où aucun joueur ne gagne en déviant de manière unilatérale. Autrement dit, pour chaque joueur $i$, s'il pense que les autres vont suivre le profil $s^{-i}$ alors il est rationnel pour lui de jouer selon la composante $s^i$.

Un jeu peut avoir plusieurs équilibres non-interchangeables (à la différence fondamentale des jeux à somme nulle). Ce concept a eu un impact considérable en économie mais aussi en biologie, science politique, informatique, recherche opérationnelle, intelligence artificielle et bien d'autres domaines d'applications. Par ailleurs l'interprétation de la notion d'équilibre de Nash a donné lieu à une littérature imposante. L'équilibre de Nash est considéré ici comme une condition mathématique de cohérence qu'il s'agit de comprendre et d'étudier.

**Définition 4.1.** *Soit $\varepsilon \geq 0$. Un $\varepsilon$-équilibre est un profil $s \in S$ tel que pour tout $i$, $s^i \in BR^i_\varepsilon(s^{-i})$, soit :*

$$g^i(t^i, s^{-i}) \leq g^i(s) + \varepsilon, \quad \forall t^i \in S^i, \quad \forall i.$$

On note $BR : S \rightrightarrows S$, la correspondance de meilleure réponse globale qui à $s \in S$ associe $\prod_{i \in N} BR^i(s^{-i})$.

**Définition 4.2.** *$s$ est un équilibre (de Nash) si $s \in BR(s)$.*
*Un équilibre est strict si $\{s\} = BR(s)$.*

Quand $BR(\cdot)$ est réduite à un singleton, c'est une fonction. Dans ce cas, tous les équilibres de Nash sont stricts et trouver un équilibre revient à trouver un point fixe d'une fonction.

## 5. Cas fini

On rappelle que l'extension mixte d'un jeu fini $G$ est le jeu où l'ensemble des stratégies du joueur $i$ est $\Sigma^i = \Delta\left(S^i\right)$, l'ensemble des probabilités sur l'ensemble fini $S^i$ et son paiement est

$$g^i(\sigma) = \sum\nolimits_{s=(s^1,\dots,s^N)\in S} \prod\nolimits_j \sigma^j(s^j) g^i(s).$$

Un équilibre (mixte) du jeu $G$ est un équilibre de l'extension mixte de $G$.

**Lemme 5.1.**
*$\sigma$ est un équilibre d'un jeu fini $G$ si et seulement si pour tout $i$ et tout $s^i \in S^i$,*

$$g^i(s^i, \sigma^{-i}) < \max_{t^i \in S^i} g^i(t^i, \sigma^{-i}) \Rightarrow \sigma^i(s^i) = 0.$$

Preuve : Puisque $g^i(\sigma^i, \sigma^{-i}) = \sum_{t^i \in S^i} \sigma^i(t^i) g^i(t^i, \sigma^{-i})$, $\sigma$ est un équilibre de $G$ si et seulement si pour tout $i$,

$$g^i(\sigma^i, \sigma^{-i}) = \max_{t^i \in S^i} g^i(t^i, \sigma^{-i}).$$

Donc $g^i(s^i, \sigma^{-i}) < \max_{t^i \in S^i} g^i(t^i, \sigma^{-i})$ implique $\sigma^i(s^i) = 0$. ∎

Le théorème fondamental est le suivant.

**Théorème 5.2** (Nash, 1950).
*Tout jeu $G$ fini admet un équilibre (mixte).*

Preuve : Soit $f$ l'application de Nash de $\Sigma = \prod_{i \in N} \Sigma^i$ vers $\Sigma$ définie par :

$$f(\sigma)^i(s^i) = \frac{\sigma^i(s^i) + (g^i(s^i, \sigma^{-i}) - g^i(\sigma))^+}{1 + \Sigma_{t^i \in S^i}(g^i(t^i, \sigma^{-i}) - g^i(\sigma))^+}$$

avec $a^+ = max(a, 0)$. Cette application est bien définie et à valeurs dans $\Sigma$ : $f(\sigma)^i(s^i) \geq 0$ et $\sum_{s^i \in S^i} f(\sigma)^i(s^i) = 1$.
Puisque $f$ est continue et que $\Sigma$ est convexe et compact (comme produit de $N$ ensembles convexes et compacts), le théorème de Brouwer 10.4 implique qu'il existe $\sigma \in \Sigma$ tel que $f(\sigma) = \sigma$.
Un tel $\sigma$ est un équilibre de Nash. En effet, fixons un joueur $i$. Si $\Sigma_{t^i \in S^i}(g^i(t^i, \sigma^{-i}) - g^i(\sigma))^+ = 0$ alors $g^i(\sigma^i, \sigma^{-i}) \geq \max_{t^i \in S^i} g^i(t^i, \sigma^{-i})$ : le joueur $i$ joue une meilleure réponse face aux autres joueurs. Sinon, $\Sigma_{t^i \in S^i}(g^i(t^i, \sigma^{-i}) - g^i(\sigma))^+ > 0$. Mais comme il existe $s^i$ avec $\sigma^i(s^i) > 0$ et $g^i(s^i, \sigma^{-i}) \leq g^i(\sigma)$ on obtient :

$$\sigma^i(s^i) = \frac{\sigma^i(s^i)}{1 + \Sigma_{t^i \in S^i}(g^i(t^i, \sigma^{-i}) - g^i(\sigma))^+}$$

d'où $\sigma^i(s^i) = 0$ et la contradiction.
Réciproquement tout équilibre est un point fixe de $f$ car toutes les quantités $(g^i(t^i, \sigma^{-i}) - g^i(\sigma))^+$ sont nulles. ∎

Le jeu $G$ a une symétrie $\phi$ si : (1) $\phi$ permute les joueurs et si $j = \phi(i)$, $\phi$ induit une permutation de $S^i$ sur $S^j$ avec (2) pour tout $i \in N$ et tout $s \in S$, $g^{\phi(i)}(\phi(s)) = g^i(s)$. Une telle permutation $\phi$ génère naturellement une application opérant sur $\Sigma$ : si $j = \phi(i)$ et $\sigma \in \Sigma$ alors $\phi(\sigma)^j(\phi(s^i)) = \sigma^i(s^i)$.

**Théorème 5.3** (Nash, 1950).
*Un jeu fini $G$ de symétrie $\phi$ admet un équilibre mixte $\sigma$ de symétrie $\phi$ ($\sigma = \phi(\sigma)$).*

Preuve : Soit $X \subset \Sigma$ le sous ensemble des profils de stratégies mixtes symétriques ($\sigma$ dans $\Sigma$ telle que $\sigma = \phi(\sigma)$).
$X$ est non vide car le profil où tous les joueurs jouent uniformément est symétrique et donc dans $X$. $X$ est fermé et convexe car si $\sigma$ et $\tau$ sont dans $X$ alors,

$$\frac{\sigma + \tau}{2} = \{\frac{\sigma^1 + \tau^1}{2}, \dots, \frac{\sigma^N + \tau^N}{2}\}$$

l'est aussi. L'application de Nash $f$ préserve par définition la symétrie ($f(X) \subseteq X$). Le Théorème de Brouwer implique donc l'existence d'un équilibre symétrique. ∎

## 6. Extensions

**Théorème 6.1** (Nash, 1951, Glicksberg , 1952).
*Si $G$ est un jeu compact, quasi-concave et continu, alors l'ensemble des équilibres de Nash de $G$ est fermé et non-vide.*
*Si $G$ est un jeu compact et continu son extension mixte a un équilibre.*

Preuve : La quasi-concavité de $G$ implique que pour tout $s$, $BR(s)$ est convexe. La continuité et la compacité de $G$ assurent que pour tout $s$, $BR(s)$ est non-vide, est compact et que le graphe de $BR$ est fermé : $s_n \to s$ et $g^i(s_n) \geq g^i(t^i, s_n^{-i}), \forall t^i \in S^i$ impliquent $g^i(s) \geq g^i(t^i, s^{-i}), \forall t^i \in S^i$ (l'hypothèse de continuité jointe est ici cruciale). Le théorème de Ky Fan (Section 10) s'applique donc à la correspondance $F = BR$ d'où : l'ensemble des équilibres de Nash de $G$ est fermé et non vide.
Si $G$ est un jeu compact et continu son extension mixte l'est également (en utilisant par exemple le théorème de Stone-Weierstrass) et est multilinéaire. On utilise alors le résultat précédent. ∎

Remarquons que si les $g^i$ sont strictement quasi-concaves pour tout $i$, tous les équilibres de Nash sont stricts car, dans ce cas, les ensembles $BR(s)$ sont réduits à des singletons pour tout $s$.

**Application :** Cournot a introduit et appliqué plus d'un siècle avant Nash la notion d'équilibre stratégique. Considérons un exemple de duopole de Cournot, où chaque firme, $i = 1, 2$, choisit de produire une quantité $q_i \in [0, 100]$, sans connaître, lors de sa décision, le montant produit par son adversaire. La fonction de coût de la firme $i$ est $C_i(q_i) = 10q_i$, et le prix de vente $p$ qui résulte de la production totale $q = q_1 + q_2$ est $p = 100 - q$. La stratégie d'une firme consiste donc à choisir $q_i$, et son profit est :

$$g^i(q^1, q^2) = p \times q_i - C_i(q_i) = (90 - (q_1 + q_2))\, q_i.$$

Ces fonctions sont continues et concaves et les espaces de stratégies sont compacts et convexes, il existe donc un équilibre de Nash (dit de Cournot). Il est facile de voir que cet équilibre ne peut être sur le bord : $q_i = 0 \Rightarrow q_j = 45 \Rightarrow q_i = \frac{45}{2}$ et $q_i = 100 \Rightarrow q_j = 0 \Rightarrow q_i = 45$. Donc l'équilibre est intérieur. Etant donné que la fonction de paiement du joueur $i$ est concave et différentiable, les conditions d'optimalité du premier ordre sont nécessaires et suffisantes. Nous déduisons donc que $BR^i(q_j) = \frac{90-q_j}{2}$. Les conditions d'équilibre sont alors : $q_1 = \frac{90-q_2}{2}$ et $q_2 = \frac{90-q_1}{2}$. L'équilibre de Cournot-Nash de ce jeu est par conséquent $q_1 = q_2 = 30$.

## 7. Le théorème de Reny

Plusieurs exemples standards en économie comme le jeu de compétition en prix de Bertrand, les jeux de timing, les enchères, la guerre d'usure ou la course au brevet ne sont pas des jeux continus. Reny (1999) a pu étendre le théorème d'existence et couvrir aussi le cas discontinu dans un cadre topologique assez général.

**Définition 7.1.** *Le joueur $i$ peut sécuriser le paiement réel $\alpha$ à $s \in S$, s'il existe $\overline{s}^i \in S^i$ tel que $g^i(\overline{s}^i, \widetilde{s}^{-i}) \geq \alpha$ pour tout $\widetilde{s}^{-i}$ dans un ouvert $U$ contenant $s^{-i}$.*

Le graphe de $G$ est l'ensemble $\Big\{(s, z) \in S \times I\!R^N;\ z = g(s)\Big\}$. On note $\Gamma$ la fermeture du graphe de $G$.

**Définition 7.2.** *Le jeu $G$ est robuste ("better-reply secure ") si pour tout $(\overline{s}, \overline{z})$ dans $\Gamma$ où $\overline{s}$ n'est pas un équilibre de Nash, il existe un joueur $i$ qui peut sécuriser un paiement strictement plus élevé que $\overline{z}^i$.*

Un jeu continu est nécessairement robuste mais l'inverse est faux : le jeu de Bertrand ou l'enchère au premier prix sont robustes mais ils ne sont pas continus.

**Théorème 7.3.** *(Reny, 1999)*
*Si $G$ est un jeu compact, quasi-concave et robuste, l'ensemble des équilibres de Nash de $G$ est fermé et non-vide.*

Preuve : Pour chaque joueur $i$ et tout $s \in S$, on introduit :

$$\underline{g}^i(s) = \sup_{U \ni s^{-i}} \inf_{\tilde{s}^{-i} \in U} g^i(s^i, s^{-i}) = \lim_{s_n^{-i} \to s^{-i}} \inf g^i(s^i, s_n^{-i})$$

où le sup est pris sur tous les voisinages de $s^{-i}$. Puisque $\underline{g}^i(s^i, \cdot)$ est s.c.i. en $s^{-i}$, on en déduit que $\overline{s}$ est un équilibre de Nash s'il existe $\overline{z}$ tel que $(\overline{s}, \overline{z}) \in \Gamma$ et pour tout joueur $i$, $\sup_{s^i \in S^i} \underline{g}^i(s^i, \overline{s}^{-i}) \leq \overline{z}^i$. En effet si $\overline{s}$ n'est pas un équilibre, il existe un joueur $i$ qui peut sécuriser $\alpha^i > \overline{z}^i$, ce qui implique :

$$\sup_{s^i \in S^i} \underline{g}^i(s^i, \overline{s}^{-i}) \geq \alpha^i.$$

Etant donnés $(s,t) \in S \times S$, on introduit $\underline{g}(s,t) = \left(\underline{g}^1(s^1, t^{-1}), ..., \underline{g}^i(s^i, t^{-i}), ..., \underline{g}^N(s^N, t^{-N})\right)$ et $E(s) = \left\{(t,h) \in \Gamma : \underline{g}(s,t) \leq h\right\}$. Ainsi un équilibre de Nash existe dès que $\cap_{s \in S} E(s)$ est non vide.

Puisque chaque $g^i$ est bornée, $\Gamma$ est un ensemble compact. Par ailleurs $\underline{g}^i(s^i, t^{-i})$ est s.c.i. en $t^{-i}$, donc $\underline{g}(s,t)$ est aussi s.c.i. en $t$, d'où $E(s)$ est compact pour tout $s$. Il suffit donc de montrer que $\cap_{s \in F} E(s)$ est non vide pour tout ensemble $F$ fini ou d'une manière équivalente, $\exists\,(\overline{s}, \overline{z}) \in \Gamma$ tel que $\underline{g}(s, \overline{s}) \leq \overline{z}$ pour tout $s \in F$.

Posons $F = \{s_1, ..., s_m\}$. Soit $S_0^i = \{s_1^i, ..., s_m^i\}$ et soit $\operatorname{conv} S_0^i$ l'enveloppe convexe de $S_0^i$ (de dimension finie). Le polytope $\operatorname{conv} S_0^i$ est compact. Par conséquent, $\underline{g}^i(s^i, \cdot)$ est s.c.i. sur $\prod_{j \neq i} \operatorname{conv} S_0^j$.

Nous avons besoin du lemme d'approximation suivant (pour la preuve duquel nous renvoyons à Reny, 1999).

**Lemme 7.4.**
*Soit $T$ compact métrique et $f : T \to \mathbb{R}$ semicontinue inférieurement. Il existe une suite de fonctions continues $f_n : T \to \mathbb{R}$ telles que, pour tout $t \in T$ :*
*(i) $f_n(t) \leq f(t)$.*
*(ii) $\forall t_n \to t : \liminf_n f_n(t_n) \geq f(t)$.*

En particulier, pour tout $s^i \in S_0^i$, il existe une suite de fonctions $g_n^i(s^i, \cdot)$ sur $\prod_{j \neq i} \operatorname{conv} S_0^j$, continues sur cet ensemble (métrique, convexe et compact), et telles que pour tout $s^{-i} \in \prod_{j \neq i} \operatorname{conv} S_0^j$ :
(i) $g_n^i(s^i, s^{-i}) \leq \underline{g}^i(s^i, s^{-i})$.
(ii) $\forall s_n^{-i} \to s^{-i} : \liminf_n g_n^i(s^i, s_n^{-i}) \geq \underline{g}^i(s^i, s^{-i})$.

Construisons maintenant une suite de jeux $G_n$. L'ensemble des stratégies du joueur $i$ dans $G_n$ est $\Delta\left(S_0^i\right)$. Pour chaque $\mu \in \prod_{j\in N}\Delta\left(S_0^j\right)$, la fonction de gain du joueur $i$ dans $G_n$ est

$$f_n^i(\mu) = \sum_{s^i\in S_0^i} g_n^i(s^i,\overline{s}^{-i})\mu^i(s^i)$$

où $\overline{s}^j = \sum_{s^j\in S_0^j}\mu^j(s^j)s^j \in \operatorname{conv} S_0^j$. Le jeu $G_n$ satisfait aux hypothèses du théorème de Nash-Glicksberg, il admet donc un équilibre de Nash $\mu_n$ (et $\overline{s}_n$ associé). Pour tout $i$ et tout $s^i$ tel que $\mu_n^i(s^i) > 0$ et pour tout $\widetilde{s}^i \in S_0^i$ :

$$g_n^i(\widetilde{s}^i,\overline{s}^{-i}) \leq f_n^i(\mu_n) = g_n^i(s^i,\overline{s}_n^{-i}) \leq \underline{g}^i(s^i,\overline{s}_n^{-i}) \leq g^i(s^i,\overline{s}_n^{-i}).$$

Les premières inégalité et égalité sont une conséquence du fait que $\mu_n$ est un équilibre et que la fonction de gain $f_n^i\left(\mu^i,\mu^{-i}\right)$ est linéaire en $\mu^i$ (et que donc tout $s^i$ tel que $\mu_n^i(s^i) > 0$ doit être optimal pour le joueur $i$ face à $\mu_n^{-i}$ dans $G_n$). La deuxième inégalité résulte de (i) dans le lemme précédent.
En intégrant par rapport à $\mu_n$ et en utilisant la quasi-concavité de $g^i$ en $s^i$, nous déduisons que pour tout $i$ et tout $\widetilde{s}^i \in S_0^i$ :

$$g_n^i(\widetilde{s}^i,\overline{s}_n^{-i}) \leq f_n^i(\mu_n) \leq g^i(\overline{s}_n).$$

Sans perte de généralité et utilisant la compacité, on peut supposer que $\overline{s}_n \to \overline{s}$ et que $g^i(\overline{s}_n) \to \overline{z}^i$. D'où, pour tout $\widetilde{s} \in F$,

$$\underline{g}_i(\widetilde{s}_i,\overline{s}_{-i}) \leq \liminf_n g_n^i(\widetilde{s}^i,\overline{s}_n^{-i}) \leq \overline{z}^i,$$

où la première inégalité est une conséquence de (ii). ∎

Ce résultat permet d'obtenir une condition plus directe sur les fonctions de paiement qui étend les conditions du théorème de Sion (1958) à plusieurs joueurs.

**Définition 7.5.** *Un jeu $G$ est réciproquement-s.c.s. si pour tout $(s,z)$ dans $\Gamma$ : si $g(s) \leq z$ alors $g(s) = z$.*

C'est le cas si, par exemple, la somme des fonctions de paiement est s.c.s. ou constante.

**Corollaire 7.6** (Extension de Sion).
*Si $G$ est compact, quasi-concave et réciproquement-s.c.s. et si, pour tout $i$ et tout $s^i$, $g^i(s^i,.)$ est s.c.i. en $S^{-i}$ alors le jeu possède un équilibre de Nash.*

Preuve : Il suffit de montrer que le jeu est robuste. Soit $(\overline{s},\overline{z})$ dans $\Gamma$ et supposons que $\overline{s}$ ne soit pas un équilibre. Reciproquement-s.c.s. implique que $g_i(\overline{s}) > \overline{z}$ pour au moins un joueur $i$ ou $g_i(\overline{s}) = \overline{z}$ pour tout joueur $i$. Dans le deuxième cas, puisque $\overline{s}$

n'est pas un équilibre, il existe $i$ et $\widehat{s}^i$ tel que $g_i\left(\widehat{s}^i, \overline{s}^{-i}\right) > \overline{z}^i$. Cela est vrai dans le premier cas aussi (prendre $\widehat{s}^i = \overline{s}^i$). Enfin, la semicontinuité inférieure de $g^i$ en $s^{-i}$ implique que $\left\{\widetilde{s}^{-i} : g_i\left(\widehat{s}^i, \widetilde{s}^{-i}\right) > g_i\left(\widehat{s}^i, \overline{s}^{-i}\right) - \varepsilon\right\}$ est un ouvert. Donc le joueur $i$ peut sécuriser $g_i\left(\widehat{s}^i, \overline{s}^{-i}\right) - \varepsilon > \overline{z}$. Le jeu est par conséquent robuste. ∎

Pour l'extension mixte on a le résultat suivant.

**Corollaire 7.7** (Reny, 1999).
*Soit $G$ compact avec des fonctions de paiement mesurables et bornées. Si l'extension mixte de $G$ est robuste alors ce jeu possède un équilibre de Nash (mixte).*

Preuve : L'extension mixte vérifie les hypothèses du théorème de Reny car $\Delta(S^i)$ est compact et la quasi-concavité des fonctions de paiements vient de la linéarité. ∎

L'extension mixte d'un jeu continu est continue et donc robuste. Par ailleurs, certains jeux peuvent être robustes alors que leur extension mixte ne l'est pas, et inversement. En passant à l'extension mixte, il devient à la fois plus facile et plus difficile pour un joueur de sécuriser un paiement. Plus facile car ce joueur a plus de stratégies, ce qui tend à augmenter le paiement qu'il peut sécuriser. Plus difficile car il doit sécuriser face à un ensemble de perturbations plus grand, ce qui tend à diminuer le paiement à sécuriser.

Il peut s'avérer difficile de vérifier que l'extension mixte d'un jeu est robuste, d'où la condition plus directe suivante.

**Corollaire 7.8** (Extension de Sion en mixte).
*On suppose que $G$ est compact et séparable, que les fonctions de paiement sont mesurables et bornées, que pour tout $i$, et tout $s^i$, $g^i(s^i, .)$ est s.c.i. en $s^{-i}$ et que l'extension mixte de $G$ est réciproquement-s.c.s. alors le jeu possède un équilibre de Nash mixte.*

Preuve : L'extension mixte satisfait aux conditions du Corollaire 7.6 car l'extension mixte du paiement de chaque joueur reste s.c.i. par rapport aux stratégies des autres joueurs. ∎

## 8. Semi-algébricité

On se place ici dans le cadre des jeux finis. Chaque $S^i, i \in N$, est un ensemble fini, de cardinal $m^i$. On pose $m = \Pi_i m^i$. Un jeu est alors identifiable à un point de $\mathbb{R}^{Nm}$. Par exemple, dans le cas de 2 joueurs avec 2 stratégies chacun, on obtient un jeu $g \in \mathbb{R}^8$ :

| | $L$ | $R$ |
|---|---|---|
| $T$ | $(a_1, a_2)$ | $(a_3, a_4)$ |
| $B$ | $(a_5, a_6)$ | $(a_7, a_8)$ |

**Proposition 8.1.**
*L'ensemble des équilibres en stratégies mixtes est défini par une famille finie d'inégalités polynomiales larges.*

Preuve : $\sigma$ est un équilibre ssi :

$$\sum\nolimits_{s^i \in S^i} \sigma^i(s^i) - 1 = 0, \sigma^i(s^i) \geq 0, \quad \forall s^i \in S^i, \forall i \in N,$$

et

$$g^i(\sigma) = \sum\nolimits_{s=(s^1,\dots,s^N)\in S} \prod\nolimits_i \sigma^i(s^i) g^i(s) \geq g^i(t^i, \sigma^{-i}), \forall t^i \in S^i, \forall i \in N,$$

les inconnues étant les $\sigma^i(s^i)$. ∎

On utilise ici l'aspect multilinéaire pour comparer les paiements uniquement dans le cas de déviations pures, qui sont en nombre fini.

Un sous-ensemble de $\mathbb{R}^K$ est *semi-algébrique* si c'est une union finie d'ensembles de la forme $\{x : P_k(x) \geq 0, \forall k = 1, \dots, r\}$ où chaque $P_k$ est un polynôme. Les ensembles semi-algébriques ont beaucoup de propriétés structurelles.

**Théorème 8.2.**
*Un ensemble semi-algébrique possède un nombre fini de composantes connexes.*

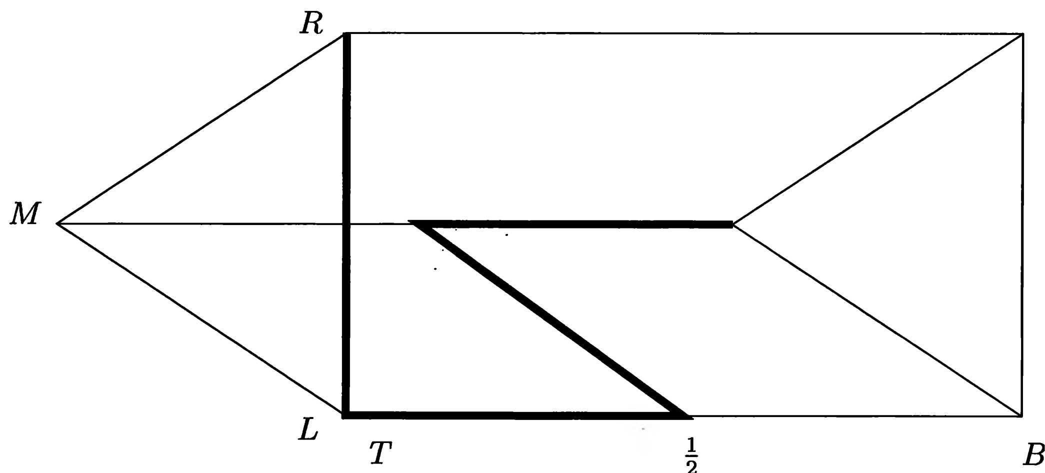
Preuve : Pour une preuve et d'autres résultats, nous renvoyons à Benedetti et Risler (1990). ∎

**Corollaire 8.3.**
*L'ensemble des équilibres en stratégies mixtes d'un jeu fini est une réunion finie d'ensembles connexes semi-algébriques (i.e. composantes connexes d'équilibres ).*

Pour le jeu suivant

| | $L$ | $M$ | $R$ |
|---|---|---|---|
| $T$ | $(2,1)$ | $(1,0)$ | $(1,1)$ |
| $B$ | $(2,0)$ | $(1,1)$ | $(0,0)$ |

on obtient :




Considérons le jeu (Kohlberg et Mertens, 1986) :

| | $L$ | $M$ | $R$ |
|---|---|---|---|
| $T$ | $(1,1)$ | $(0,-1)$ | $(-1,1)$ |
| $m$ | $(-1,0)$ | $(0,0)$ | $(-1,0)$ |
| $B$ | $(1,-1)$ | $(0,-1)$ | $(-2,-2)$ |

Il y a une seule composante connexe d'équilibres qui est de la forme

| | $L$ | $M$ | $R$ |
|---|---|---|---|
| $T$ | $xx$ | | $xx$ |
| $m$ | | $xx$ | $xx$ |
| $B$ | $xx$ | $xx$ | |



et donc homéomorphe à un cercle (dans l'espace des stratégies).

Chaque point est limite d'un équilibre d'un jeu proche : par exemple, avec $\varepsilon > 0$, le jeu

| | $L$ | $M$ | $R$ |
|---|---|---|---|
| $T$ | $(1,1-\varepsilon)$ | $(\varepsilon,-1)$ | $(-1-\varepsilon,1)$ |
| $m$ | $(-1,-\varepsilon)$ | $(-\varepsilon,\varepsilon)$ | $(-1+\varepsilon,-\varepsilon)$ |
| $B$ | $(1-\varepsilon,-1)$ | $(0,-1)$ | $(-2,-2)$ |

a comme unique équilibre $(\varepsilon/(1+\varepsilon), 1/(1+\varepsilon), 0); (0, 1/2, 1/2)$.

## 9. Développements et exemples

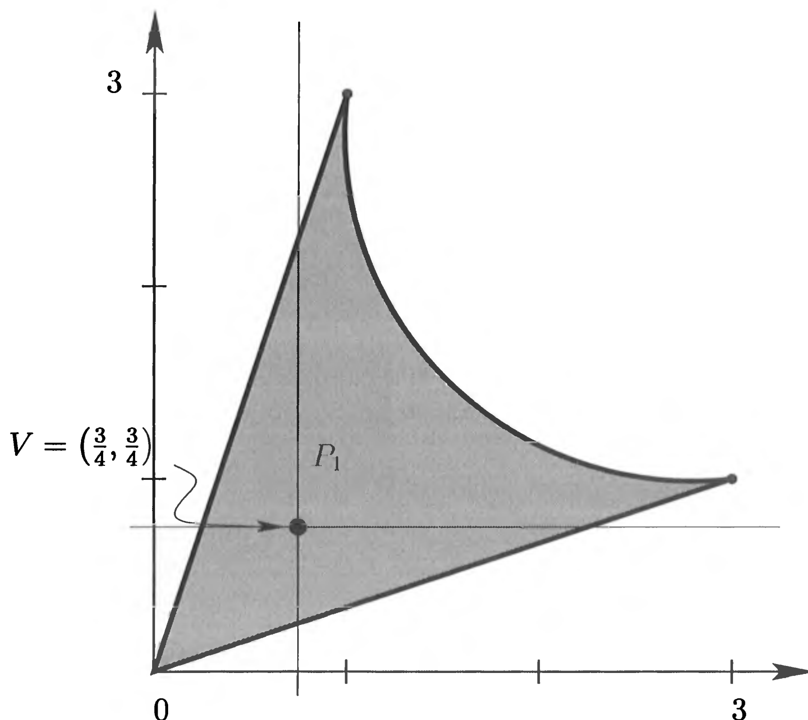
### 9.1. Paiements possibles et point de menace.

Soit $G$ un jeu fini. On introduit les notions suivantes. Le *niveau individuellement rationnel* pour le joueur $i$ est

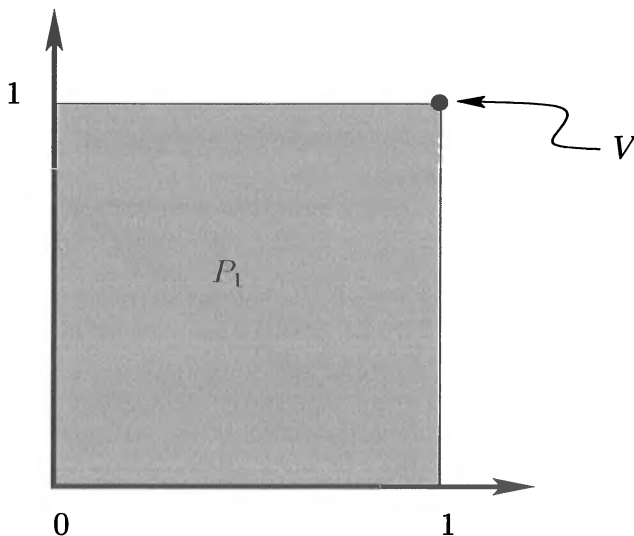
$$V^i = \min_{S^{-i}} \max_{S^i} G^i(t^i, t^{-i})$$

et le *point de menace* est $V$. (Comparer au paiement garanti, Chapitre 2, Définition 1.2, voir Exercice 2.2). L'ensemble des *paiements possibles* dans le jeu en un coup est $P_1 = \{x \in I\!R^n; \exists s \in S, G(s) = x\}$ et $\Delta = \{x \in P_1; x^i \geq V^i\}$ est l'ensemble des *paiements possibles et individuellement rationnels* . Voici 3 exemples :

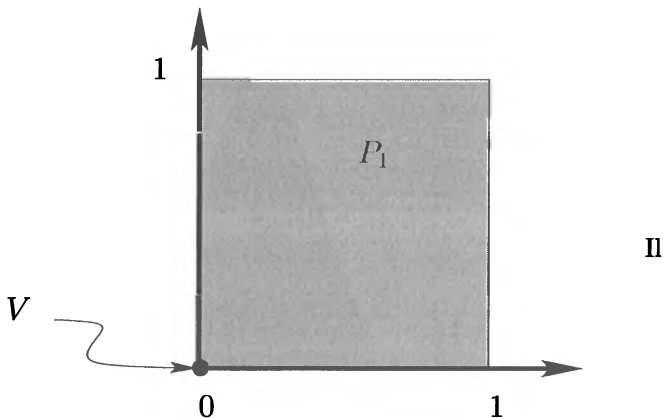
| | $L$ | $R$ |
|---|---|---|
| $T$ | $(3,1)$ | $(0,0)$ |
| $B$ | $(0,0)$ | $(1,3)$ |



| | $L$ | $R$ |
|---|---|---|
| $T$ | $(1,1)$ | $(1,0)$ |
| $B$ | $(0,1)$ | $(0,0)$ |




| | $L$ | $R$ |
|---|---|---|
| $T$ | $(1,1)$ | $(0,1)$ |
| $B$ | $(1,0)$ | $(0,0)$ |




Il est facile de voir que $P_1$ est un ensemble fermé et connexe par arcs ; simplement connexe si $n = 2$, mais pas pour 3 joueurs (voir Exercice 5.3).

**9.2. Invariance.**

Soit le jeu 1 symétrique suivant :

| | $L$ | $R$ |
|---|---|---|
| $T$ | $(3,3)$ | $(0,0)$ |
| $B$ | $(0,0)$ | $(2,2)$ |

$a$, $b$, $c$, $d$ des réels quelconques. Translatons la matrice précédente comme suit :

| | $L$ | $R$ |
|---|---|---|
| $T$ | $(3+a, 3+c)$ | $(0+b, 0+c)$ |
| $B$ | $(0+a, 0+d)$ | $(2+b, 2+d)$ |

En particulier la correspondance de meilleure réponse est inchangée : l'invariance stratégique implique que ces jeux doivent avoir le même ensemble de solutions.
Si $a = -2$, $b = 0$, $c = -1$ et $d = 0$, nous obtenons le jeu 2 :

| | $L$ | $R$ |
|---|---|---|
| $T$ | $(1,1)$ | $(0,-2)$ |
| $B$ | $(-2,0)$ | $(2,2)$ |

et si $a = -1$, $b = 2$, $c = 1$ et $d = 0$, le jeu 3 :

| | $L$ | $R$ |
|---|---|---|
| $T$ | $(2,4)$ | $(2,1)$ |
| $B$ | $(-1,0)$ | $(4,2)$ |

Le jeu 1 admet deux équilibres de Nash purs $(T, L)$ et $(B, R)$ et un équilibre mixte et symétrique $\left((\frac{2}{5}T, \frac{3}{5}B), (\frac{2}{5}L, \frac{3}{5}R)\right)$. Les jeux 2 et 3 admettent évidemment les mêmes équilibres de Nash.

Si une théorie dicte que la solution du jeu 1 devrait être $(T, L)$ car c'est dans l'intérêt commun des deux joueurs (ce qui semble raisonnable) et si cette théorie est invariante stratégiquement elle devrait sélectionner $(T, L)$ dans le jeu 2, mais l'intérêt commun des joueurs dans ce jeu est $(B, R)$. Si cette théorie sélectionne dans le jeu 1 l'équilibre mixte car c'est le seul qui respecte la symétrie du jeu, elle devrait faire de même dans le jeu 3. Mais, ce dernier n'est pas symétrique.

### 9.3. Prudence.

A la différence des jeux à somme nulle, la notion d'équilibre de Nash dans les jeux à somme non-nulle ne capture pas la notion de risque. Considérons le jeu suivant :

| | $L$ | $R$ |
|---|---|---|
| $T$ | $(3,1)$ | $(2,2)$ |
| $B$ | $(-100,2)$ | $(3,3)$ |

$(B,R)$ avec le paiement $(3,3)$ est l'unique équilibre de Nash. Cependant, même si la croyance du joueur 1 est que le joueur 2 jouer $R$, va-t-il effectivement choisir B et risquer de perdre 100 si pour une raison ou une autre (irrationalité, vengeance, erreur) le joueur 2 joue $L$ ? Jouer $B$ semble dangereux pour le joueur ligne alors que jouer $T$ est sans risque car au pire il obtient 2.
Plus généralement $\sigma^i$ est *une stratégie prudente* pour le joueur $i$ si pour tout $s^{-i}$ :

$$g^i(\sigma^i, s^{-i}) \geq \max_{\tau^i \in \Delta(S^i)} \min_{t^{-i} \in S^{-i}} g^i(\tau^i, t^{-i})$$

Soit l'exemple suivant (Aumann et Maschler, 1972) :

| | $L$ | $R$ |
|---|---|---|
| $T$ | $(2,0)$ | $(0,1)$ |
| $B$ | $(0,1)$ | $(1,0)$ |

Le seul équilibre est donné par $x = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ et $y = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ avec un vecteur de paiement d'équilibre $(\frac{2}{3}, \frac{1}{2})$.
Une stratégie prudente $x^*$ du joueur 1 consiste à jouer optimal dans le jeu à somme nulle :

| | $L$ | $R$ |
|---|---|---|
| $T$ | 2 | 0 |
| $B$ | 0 | 1 |

donc $x^* = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ et garantit $\frac{2}{3}$ au joueur 1.
De même, une stratégie prudente $y^*$ du joueur 1 consiste à jouer optimal dans le jeu à somme nulle :

| | $L$ | $R$ |
|---|---|---|
| $T$ | 0 | 1 |
| $B$ | 1 | 0 |

donc $y^* = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ et garantit $\frac{1}{2}$ au joueur 2.
Considérons le joueur 1 : jouer $x^*$ lui assure de gagner $\frac{2}{3}$. Jouer $x$ ne garantit pas $\frac{2}{3}$

mais c'est la stratégie d'équilibre de paiement $\frac{2}{3}$.
Si le joueur 2 joue sa stratégie d'équilibre $y$, le joueur 1 sera indifférent entre $T$ et $B$ et donc n'importe quelle stratégie sera une meilleure réponse à $y$, en particulier $x^*$. Et s'il ne joue pas la stratégie d'équilibre, l'itération des meilleures réponses ne converge pas.
Rajouter comme stratégies pures ces stratégies donne le jeu suivant :

| | $L$ | $R$ | $y^*$ | $y$ |
|---|---|---|---|---|
| $T$ | $(2,0)$ | $(0,1)$ | $(1,1/2)$ | $(2/3,2/3)$ |
| $B$ | $(0,1)$ | $(1,0)$ | $(1/2,1/2)$ | $(2/3,1/3)$ |
| $x^*$ | $(2/3,2/3)$ | $(2/3,1/3)$ | $(2/3,1/2)$ | $(2/3,4/9)$ |
| $x$ | $(1,1/2)$ | $(1/2,1/2)$ | $(3/4,1/2)$ | $(2/3,1/2)$ |

### 9.4. Pareto optimalité et domination.

Dans le leu suivant :

| | | |
|---|---|---|
| $(1,0)$ | $(0,1)$ | $(0,0)$ |
| $(0,1)$ | $(1,0)$ | $(1,0)$ |
| $(0,0)$ | $(0,1)$ | $(1,1)$ |

le seul paiement parétien est un équilibre de Nash composé de stratégies faiblement dominées.

### 9.5. Domination.

L'addition d'une stratégie dominante pour un joueur peut être défavorable à ce joueur :

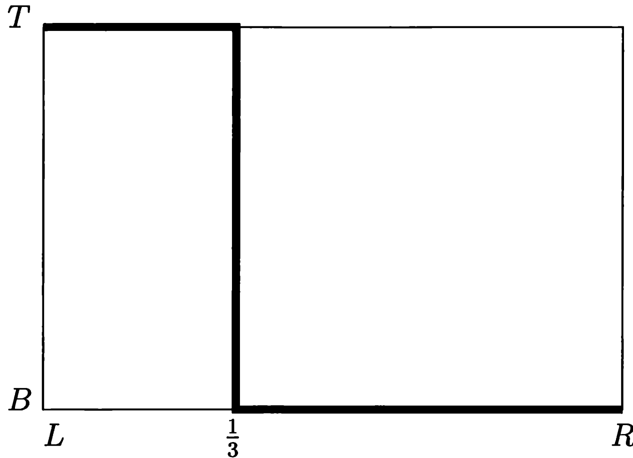
| | $L$ | $R$ |
|---|---|---|
| $T$ | $(10,0)$ | $(1,1)$ |
| $B$ | $(5,5)$ | $(0,0)$ |

$T$ est strictement dominante et induit le paiement $(1,1)$. Si le joueur 1 n'a que la stratégie $B$, l'issue est $(5,5)$.

### 9.6. Rationalité et information.

Dans le jeu suivant, le joueur 2 a des paiements indépendants de ses coups. L'ensemble des équilibres de Nash est donc donné par le graphe de la correspondance de meilleure réponse du joueur 1 et il y a une seule composante connexe :

| | $L$ | $R$ |
|---|---|---|
| $T$ | $(1,1)$ | $(0,1)$ |
| $B$ | $(0,0)$ | $(2,0)$ |




Cependant si le joueur 2 connait les paiements du joueur 1 (et qu'il sait que le joueur 1 le sait), on peut penser qu'il jouera $L$ (et $R$ dans le jeu ci dessous).

| | $L$ | $R$ |
|---|---|---|
| $T$ | $(0,1)$ | $(1,1)$ |
| $B$ | $(2,0)$ | $(0,0)$ |

Le comportement "rationnel" d'un joueur dépend des paiements des autres joueurs ...

### 9.7. Self-enforcing.

Dans le jeu ci-dessous l'équilibre $(T, L)$ est Pareto-dominant mais $(B, R)$ est *risk-dominant.*

Par ailleurs $(T, L)$ n'est pas *self-enforcing* (Aumann, 1990) : le joueur 1 a intérêt à ce que le joueur 2 joue $L$, quels que soient ses plans personnels.

| | $L$ | $R$ |
|---|---|---|
| $T$ | $(7,7)$ | $(0,6)$ |
| $B$ | $(6,0)$ | $(5,5)$ |

Par contre dans la bataille des sexes ci-dessous l'équilibre $(T, L)$ est self-enforcing pour le joueur 1. Il ne suggère $(T, L)$ que s'il a l'intention de jouer $T$.

| | $L$ | $R$ |
|---|---|---|
| $T$ | $(2,1)$ | $(0,0)$ |
| $B$ | $(0,0)$ | $(1,2)$ |

## 10.Théorèmes de Brouwer et de Ky Fan

Pour prouver le théorème de Brouwer, nous utiliserons le lemme de Sperner qui nécessite des notations nouvelles.
Soit $\Delta$ un simplexe de dimension $k$, donc avec $k+1$ sommets notés $\{x^0, ..., x^k\}$(en dimension zéro c'est un point, en dimension un c'est un intervalle, deux un triangle, trois une pyramide, etc...).
Une subdivision simpliciale de $\Delta$ est une triangulation du simplexe en sous-simplexes. Plus précisément, c'est une collection finie de simplexes $\{\Delta_i\}$ qui satisfait $\cup_i \Delta_i = \Delta$ et pour tout $(i,j)$, $\Delta_i \cap \Delta_j$ est soit vide, soit un sous-simplexe de $\Delta_i$ et de $\Delta_j$ appartenant à la collection. Le pas d'une subdivision est le plus large diamètre d'un sous-simplexe.

Soit $V$ la collection des sommets de tous les sous-simplexes. Chaque point $v$ de $V$ se décompose d'une manière unique comme combinaison convexe des points extrêmes $x^j, j = 0, ..., k$ : $(v = \sum_{i=0}^k \alpha^i(v)x^i)$). Soit

$$I(v) = \{i : \alpha^i(v) > 0\} \subset \{0, ..., k\}$$

l'ensemble des indices ayant un poids strictement positif dans la décomposition : $\operatorname{conv}\{x^i : i \in I(v)\}$ est donc la face minimale de $\Delta$ contenant $v$ dans son intérieur relatif.

Une coloration de $V$ est une fonction qui associe à chaque $v$ dans $V$ un entier dans $I(v)$. L'interprétation est la suivante : en tout, il y a $k+1$ couleurs possibles. Chaque sommet $x^j$ a la couleur $j$. La couleur d'un point $v$ de l'intérieur relatif d'une face $F$ de $\Delta$ peut être celle de n'importe quel sommet de $F$.

Un sous-simplexe est complètement coloré si ses sommets portent les $(k+1)$ couleurs possibles.

**Lemme 10.1** (Sperner, 1928).
*Pour toute subdivision simpliciale du simplexe, il existe un nombre impair de sous-simplexes complètement colorés.*

Preuve : On procède par récurrence sur $k$. Si $k = 0$, c'est trivial. Supposons le résultat vrai pour $k-1$.
Imaginons que le simplexe soit une maison. Les sous-simplexes de dimension $k$ seront

les différentes pièces. Une porte est par définition un sous-simplexe de dimension $k-1$ ayant toutes les couleurs de 0 à à $k-1$.
Une pièce peut posséder aucune porte, une porte ou deux portes. En effet, supposons qu'une pièce possède $k$ sommets colorés par les couleurs $0, ...,$ à $k-1$. Si le dernier sommet possède la couleur manquante $k$, la pièce ne possède qu'une porte (et par la même occasion elle sera complètement colorée), sinon la pièce aura exactement deux portes (et il lui manquera une couleur).
L'hypothèse de récurrence implique qu'il y a un nombre impair de portes sur la face contenant les sommets $x^0, ..., x^{k-1}$. Montrons donc qu'il existe un nombre impair de pièces avec exactement une seule porte. La preuve est obtenue par un algorithme.
Imaginez que vous entrez dans le simplexe $\Delta$ par une porte de l'extérieur. Si la pièce où vous entrez possède une autre porte, vous entrez via cette porte vers une autre pièce, si cette dernière possède une autre porte, vous continuez votre chemin ainsi de suite jusqu'à ce que (1) vous sortez de $\Delta$ et ce par la face par laquelle vous ètes entré (par hypothèse sur la coloration) ou (2) vous arrivez vers une pièce sans autre porte de sortie. Cette dernière sera alors complètement colorée.
Puisqu'il y a un nombre impair de portes extérieures (par récurrence), il y a un nombre impair de pièces complètement colorées que vous pouvez atteindre en venant de l'extérieur.
Il reste à considérer le cas d'une pièce $P$ complètement colorée et ne pouvant pas être atteinte de l'extérieur. Cette pièce a exactement une seule porte. Vous pouvez donc en sortir et entrer dans une nouvelle pièce, et continuer ainsi de suite jusqu'à à ce que (1) vous arriviez dans une autre pièce $P'$ sans aucune porte de sortie (complétement colorée) et différente de la pièce initiale ou (2) vous sortez de $\Delta$. Mais l'éventualité (2) implique que $P$ peut être atteinte de l'extérieur (absurde). Les pièces complètement colorées non liées à l'extérieur vont donc par paires.
En définitive, il y a en tout un nombre impair de pièces complètement colorées. ∎

Il existe en particulier au moins un sous-simplexe complètement coloré. Notons que la preuve est constructive et donne par la même occasion un algorithme.

Une version plus forte de ce lemme établit que le nombre de sous-simplexes complétement colorés avec une orientation positive (i.e. la même que $\Delta$) est un de plus que le nombre de ceux ayant une orientation opposée. (L'orientation est facile à voir en dimension 2. En suivant dans l'ordre les couleurs 0, 1 puis 2 d'un sous-simplexe, son orientation sera $+1$ si on tourne dans le même sens que celui de $\Delta$ et elle sera $-1$ sinon). On montre que la somme des orientations (indices) est égale à $+1$. La preuve

est sensiblement la même : deux pièces intérieures liées entre elles ont nécessairement des orientations opposées et on utilise la récurrence pour les pièces reliées à l'extérieur.

**Corollaire 10.2.**
*Toute fonction continue d'un simplexe dans lui-même admet un point fixe.*

Preuve : Soit $\Delta^k = \{(r^0, ..., r^k) \in I\!R^{k+1}; r^i \geq 0, \sum_{i=0}^k r^i = 1\}$ le simplexe unitaire de dimension $k$, $f$ continue de $\Delta^k$ dans lui-même et $\varepsilon > 0$. On considère une subdivision de $\Delta^k$ de pas plus petit que $\varepsilon$. Soit $\lambda$ une coloration de $V$ qui satisfait :

$$\lambda(v) \in I(v) \cap \{i : f^i(v) \leq v^i\}.$$

Le choix est possible car l'intersection est non vide sinon, $1 = \sum_{i=0}^k f^i(v) > \sum_{i \in I(v)} v^i = 1$. Par le lemme de Sperner, il existe un sous-simplexe complètement coloré, donc $k+1$ points $v(i,\varepsilon)$ avec $f^i(v(i,\varepsilon)) \leq v(i,\varepsilon)^i$ pour tout $i$, et $\|v(i,\varepsilon) - v(j,\varepsilon)\| \leq \varepsilon, \forall i,j = 0,...,k$. En faisant tendre $\varepsilon$ vers 0, on en déduit l'existence d'un point d'accumulation $v$ tel que pour tout $i$, $f^i(v) \leq v^i$, par continuité. Puisque $v$ et $f(v)$ sont dans $\Delta^k$, $f(v) = v$. ∎

**Lemme 10.3.**
*Soit $K$ une rétraction d'un simplexe $\Delta$. Si $f : K \to K$ est continue, alors $f$ admet un point fixe.*

Preuve : Soit $h$ la rétraction de $\Delta$ sur $K$. $h : \Delta \to K \subset \Delta$ et $h|_K = Id|_K$. Alors $f \circ h : \Delta \to \Delta$ est continue et admet donc un point fixe $z$. Mais $z \in K$ donc $f \circ h(z) = f(z) = z$ est un point fixe de $f$ dans $K$. ∎

**Théorème 10.4** (Brouwer, 1912).
*Soit $C$ un convexe compact non-vide d'un espace euclidien de dimension finie et $f : C \to C$ continue, alors $f$ admet un point fixe.*

Preuve : Soit $\Delta$ un simplexe contenant $C$. Puisque $C$ est convexe et fermé, $\Pi$ la projection de $\Delta$ sur $C$ est une rétraction continue (et même Lipschitz). On applique alors le lemme précédent. ∎

Ce théorème a été étendu à des correspondences en dimension finie par Kakutani (1941). Une version plus générale est la suivante.

**Théorème 10.5** (Fan, 1952).
*Soit $C$ un convexe compact non-vide d'un espace vectoriel normé et $F$ une correspondance de $C$ dans $C$ telle que :*
*(i) $\forall c \in C$, $F(c)$ est un convexe compact non-vide,*

*(ii) le graphe de $F$ est fermé.*
*Alors, $\{c \in C : c \in F(c)\}$ est fermé et non vide.*

Preuve : La preuve se fait par l'absurde. Si $F$ n'a pas de point fixe, la distance $\delta(x)$ de tout $x$ au fermé $F(x)$ est $> 0$. On dénote par $\Omega_x$ l'ouvert convexe $\Omega_x = \{y \in C; d(y, F(x)) < \delta(x)/2\}$. $U_x = \{z \in C; F(z) \subset \Omega_x\}$ est un ouvert contenant $x$ (car $F$ est s.c.s.) donc il contient aussi une boule ouverte $B(x, s(x))$ avec $0 < s(x) < \delta(x)/3$. On a donc $B(x, s(x)) \cap \Omega_x = \emptyset$. Les boules ouvertes $B(x, s(x)/2)$ recouvrent $C$, soit $B(x_i, s(x_i)/2)$ un sous recouvrement fini. Pour $r = \min_i s(x_i)/2$ et pour tout $z \in C$ la boule ouverte $B(z, r)$ est incluse dans une boule $B(x_i, s(x_i))$. On extrait du recouvrement de $C$ par les boules $B(z, r)$ un nouveau recouvrement fini $\{B(z_k, r)\}$ puis on considère une partition de l'unité subordonnée : $f_k(x) = \dfrac{d(x, B(z_k, r)^c)}{\sum_j d(x, B(z_j, r)^c)}$. On a donc une famille finie de fonctions continues $f_k$ de $C$ dans $[0, 1]$ avec $\sum_k f_k = 1$ et $f_k = 0$ en dehors de $B(z_k, r)$. Prenons $y_k \in F(z_k)$ et posons $f(x) = \sum_k f_k(x) y_k$. $f$ induit une fonction continue de $\text{conv}\{y_k\}$ dans lui même donc a un point fixe $x$ par le théorème de Brouwer. Si $f_k(x) > 0$ alors $x \in B(z_k, r)$ par conséquent $z_k \in B(x, r) \subset B(x_i, s(x_i)) \subset U_{x_i}$ pour un certain $i$. Donc $y_k \in F(z_k) \subset \Omega_{x_i}$ et par convexité $f(x) \in \Omega_{x_i}$ mais $x \in B(x_i, s(x_i))$ et $\Omega_{x_i} \cap B(x_i, s(x_i)) = \emptyset$ ce qui contredit $f(x) = x$. ∎

Il est aussi évident que le théorème de Kakutani implique celui de Brouwer. On peut montrer (Exercice 5.1) que supposer l'existence d'un équilibre de Nash pour tout jeu fini à deux joueurs permet de prouver le théorème de Kakutani. Ainsi, il semble que toute la difficulté du théorème de Brouwer se résume à l'existence d'équilibre dans ce cadre. On a prouvé que beaucoup de problèmes de point fixe appartiennent à la classe de problèmes dit PPAD-complets (Brouwer, équilibre Walrasien, équilibre de Nash avec beaucoup de joueurs, etc). La même propriété a été établie récemment pour les jeux finis à 2 joueurs (Chen et Deng, 2006). Calculer numériquement un équilibre de Nash pour un jeu fini à deux joueurs est donc un problème difficile.

CHAPITRE 5

# Variété des équilibres et dynamique

## 1. Variété des équilibres

On se place encore ici dans le cadre des jeux finis. Chaque $S^i$ est un ensemble fini, de cardinal $m^i$ et $m = \prod_i m^i$. Un jeu $g$ est alors identifiable à un point de $\mathbb{R}^{Nm}$. On considère ici la variété des équilibres obtenue en prenant les paiements comme paramètres. Les équations d'équilibre forment une famille finie d'inégalités pôlynomiales en $(g, \sigma)$

$$F_k(g, \sigma) \leq 0, \qquad k = 1, ..., K,$$

où $g \in R^{Nm}$ est le jeu et $\sigma$ le profil de stratégies.
Soient $\mathcal{G}$ l'ensemble des jeux (on rappelle que le nombre des joueurs et les ensembles de stratégies pures sont fixés) et $\mathcal{E}$ le graphe de la correspondance d'équilibre :

$$\mathcal{E} = \{(g, \sigma); g \in \mathcal{G},\ \sigma \text{ équilibre de } \ g\}$$

que l'on étend par continuité à la compactification $\overline{\mathcal{G}}$ de $\mathcal{G}$ et que l'on note $\overline{\mathcal{E}}$.

**Théorème 1.1** (Kohlberg et Mertens, 1986).
*La projection $\pi$ de $\overline{\mathcal{E}}$ sur $\overline{\mathcal{G}}$ est homotope à un homéomorphisme.*

Preuve : On décompose un paiement $g$ en $\tilde{g}$ et $h$, où pour tout $i$, $h^i$ est un vecteur de $\mathbb{R}^{m^i}$ avec

$$g^i(s^i, s^{-i}) = \tilde{g}^i(s^i, s^{-i}) + h^i(s^i)$$

et

$$\sum\nolimits_{s^{-i} \in S^{-i}} \tilde{g}^i(s^i, s^{-i}) = 0, \qquad \forall s^i \in S^i.$$

Pour tout $\sigma \in \Sigma = \prod_i \Delta(S^i)$ on introduit le vecteur $Vg^i(\sigma^{-i})$ dans $\mathbb{R}^{m^i}$ dont la composante sur $s^i$ est le paiement $g^i(s^i, \sigma^{-i})$ et $Vg(\sigma)$ dénote le vecteur correspondant dans $\mathbb{R}^m$ ($Vg^i$ est le *paiement vectoriel* du joueur $i$). On pose alors, pour $g = (\tilde{g}; h)$ et $t \in [0, 1]$ :

$$\Pi_t(g, \sigma) = (\tilde{g}; t(\sigma + Vg(\sigma)) + (1 - t)h)$$

qui est l'homotopie annoncée.

On a clairement $\Pi_0 = \pi$.

Vérifions que $\Pi_t(\infty) = \infty, \forall t \in [0,1]$.

On note $\|.\|$ la norme infinie et un voisinage de $\infty$ est donc de la forme $\|x\| \geq M$. Soit alors $\|(g,\sigma)\| \geq 2R+1$, d'où $\|g\| \geq 2R+1$ et par conséquent soit $\|\tilde{g}\| \geq R$ d'où $\|\Pi_t(g,\sigma)\| \geq R$ ou bien $\|h\| \geq 2R+1$ et $\|\tilde{g}\| \leq R$, ce qui implique $\|t(\sigma+Vg(\sigma))+(1-t)h\| \geq R$. En effet $\|t(\sigma+Vg(\sigma))+(1-t)h-h\| \leq \|(\sigma+Vg(\sigma))-h\| \leq 1+\|\tilde{g}\| \leq R+1$.

Il reste à établir le résultat suivant:

**Lemme 1.2.**
*$\varphi = \Pi_1$ est un homéomorphisme de $\overline{\mathcal{E}}$ sur $\overline{\mathcal{G}}$.*

Preuve : On pose, partant de $g = (\tilde{g}, z)$, avec $z = \{z^i\}$ et $z^i \in I\!R^{m^i}$ :

$$v^i = \min\{u; \sum\nolimits_{s\in S^i}(z^i_s - u)^+ = 1\}$$

puis $\sigma^i_s = (z^i_s - v^i)^+$ et enfin $\ell^i_s = z^i_s - \sigma^i_s - \tilde{g}^i(s,\sigma^{-i})$.

Alors $\psi(g) = \psi(\tilde{g}; z) = ((\tilde{g},\ell),\sigma)$ :
(i) est une application de $\overline{\mathcal{G}}$ dans $\overline{\mathcal{E}}$, et satisfait
(ii) $\varphi \circ \psi = Id_{\overline{\mathcal{G}}}$
(iii) $\psi \circ \varphi = Id_{\overline{\mathcal{E}}}$.

Pour le premier point, vérifions que $\sigma$ (qui est un profil de stratégies, par construction de $v$) est un équilibre dans le jeu $\gamma = (\tilde{g},\ell)$. Si $\sigma^i_s > 0$, $\sigma^i_s = z^i_s - v^i$ et alors $\gamma^i(s,\sigma^{-i}) = \tilde{g}^i(s,\sigma^{-i}) + \ell^i_s = z^i_s - \sigma^i_s = v^i$. Par ailleurs, $\sigma^i_s = 0$ implique $z^i_s \leq v^i$ donc $\gamma^i(s,\sigma^{-i}) = z^i_s \leq v^i$. Les actions jouées par le joueur $i$ donnent le paiement $v^i$ et les autres moins : $\sigma$ est un équilibre de paiement vectoriel $v$.
Pour (ii), partant de $g = (\tilde{g}, z)$ nous obtenons, via $\psi$, le couple $(\gamma = (\tilde{g},\ell);\sigma)$ puis, par $\varphi$, le jeu $(\tilde{g}, \sigma + V\gamma(\sigma))$.

Or $\gamma(\sigma) = \tilde{g}(\sigma) + \ell(\sigma) = \tilde{g}(\sigma) + z(\sigma) - \sigma - \tilde{g}(\sigma)$ donc $\sigma + V\gamma(\sigma) = z$ et le jeu d'arrivée est $g$.
Finalement pour (iii), partant d'un couple $(g = (\tilde{g},h);\sigma)$ dans $\mathcal{E}$ on obtient $(\tilde{g}, \sigma + Vg(\sigma))$ dans $\mathcal{G}$. Soit $z = \sigma + Vg(\sigma)$ comme dans la construction précedente, point (i). Mais puisque $\sigma$ est un équilibre dans $g$ (de paiement $w$) on obtient : $\sigma^i_s > 0 \Rightarrow g^i(s,\sigma^{-i}) = w^i$ et $\sigma^i_s = 0 \Rightarrow g^i(s,\sigma^{-i}) \leq w^i$. Donc le $v$ associé à $z$ est $w$, la stratégie associée est $\sigma$ et $\ell = h$. ∎

Soit $g$ un jeu et $NE(g)$ l'ensemble de ses équilibres qui est composé d'un nombre fini de composantes connexes $C_k, k = 1, ..., L$. $C_k$ est *essentielle* si pour tout voisinage $V$ de $C_k$ dans $\Sigma$, il existe un voisinage $W$ de $g$ dans $\mathcal{G}$ tel que pour tout $g' \in W$ il existe $\sigma \in NE(g') \cap V$.

**Proposition 1.3.**
*i) Génériquement l'ensemble des équilibres est fini et impair.*
*ii) Tout jeu possède dans $\mathcal{E}$ une composante essentielle.*

Preuve :

*i*) Génériquement un équilibre est isolé et transverse à la projection de la variété des équilibres sur l'espace des jeux. Si il est "sortant" le degré est 1 et -1 si il est "rentrant". Le degré global de la projection (somme sur les composantes) est invariant par homotopie donc égal à 1 (par l'homéomorphisme) : le degré est 1 pour $p+1$ équilibres et -1 pour $p$ autres.

*ii*) Par récurrence, il suffit de montrer que si les équilibres de $g$ sont dans $U \cup V$, où $U$ et $V$ sont 2 ouverts dont les adhérences sont disjointes alors il existe un voisinage $W$ de $g$ tel que tout $g' \in W$ a des équilibres dans $U$ ou tout $g' \in W$ a des équilibres dans $V$.
Soit $\Psi(g)$ le graphe de la correspondance de meilleure réponse en $g$ (dans $\Sigma \times \Sigma$). Il existe donc un voisinage (à coupes convexes) $C$ de $\Psi(g)$ tel que l'intersection avec la diagonale soit dans $(U \cup V) \times (U \cup V)$.

On procède par l'absurde, donc on suppose qu'il existe $g_1$ proche de $g$ dont tous les équilibres sont dans $U$ et de même pour $g_2$ et $V$. Par ailleurs on peut supposer que $\Psi(g_i) \subset C$.

Soit $\alpha$ une fonction continue de $\Sigma$ dans $[0, 1]$, nulle sur $U$ et égale à 1 sur $V$.

La correspondance définie par $T(\sigma) = \alpha(\sigma)\Psi(g_1)(\sigma) + (1-\alpha(\sigma))\Psi(g_2)(\sigma)$ est s.c.s. et à valeurs convexes. Son graphe est inclus dans $C$ donc son ensemble de points fixes, non vide est dans $U \cup V$. Considérons un tel $\sigma = T(\sigma)$.

Si $\sigma \in U$, $\alpha(\sigma) = 0$ et $\sigma$ est un point fixe de $\Psi(g_2)$ donc dans $V$. On obtient de même une contradiction si $\sigma \in V$. ∎

Soit le jeu suivant, paramétré par $\alpha$

| | $L$ | $R$ |
|---|---|---|
| $T$ | $(\alpha, 0$ | $(\alpha, 0)$ |
| $M$ | $(1, -1)$ | $(-1, 1)$ |
| $B$ | $(-1, 1)$ | $(1, -1)$ |

La correspondance d'équilibre est donnée par :

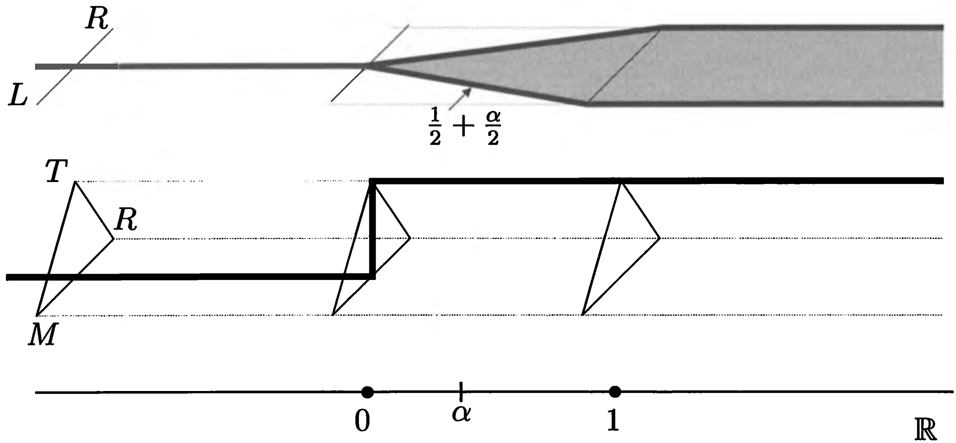



FIG 5.1

## 2. Champs de vecteurs et dynamique

**Définition 2.1.** *Un champ de Nash est une application continue (ou une correspondence s.c.s) $\Phi$ de $\mathcal{G} \times \Sigma$ dans $\Sigma$ telle que*

$$NE(g) = \{\sigma \in \Sigma; \Phi(g, \sigma) = \sigma\}$$

Si on ne demande pas de régularité en $g$ on pourrait, pour chaque jeu, sélectionner un équilibre $\bar{\sigma}$ et définir un champ de vecteurs ad-hoc.

**Proposition 2.2.**
*Les deux fonctions suivantes sont des champs de Nash :*
*1. (Nash, 1950)*

$$\Phi(g, \sigma)^i(s^i) = \frac{\sigma^i(s^i) + (g^i(s^i, \sigma^{-i}) - g^i(\sigma))^+}{1 + \Sigma_{t^i}(g^i(t^i, \sigma^{-i}) - g^i(\sigma))^+}$$

*2. (Gul, Pearce and Stacchetti, 1993)*
*Soit $P_\Sigma$ l'opérateur de projection sur le convexe $\Sigma$, produit des simplexes $\Sigma^i$. On définit*

$$\Phi(g,\sigma) = P_\Sigma(\{\sigma^i + Vg^i(\sigma^{-i})\}).$$

Preuve : Pour le point 1, voir Chapitre 4, preuve du Théorème 5.2.
Pour le point 2, observons que $\sigma$ est un équilibre de $g$ si et seulement si :

$$\langle \sigma, Vg(\sigma)\rangle \geq \langle \tau, Vg(\sigma)\rangle, \quad \forall \tau \in \Sigma.$$

Par ailleurs la projection d'un point $x$ sur un convexe $C$ est l'unique point $\Pi_C(x) \in C$ vérifiant :

$$\langle x - \Pi_C(x), y - \Pi_C(x)\rangle \leq 0, \quad \forall y \in C.$$

La première inégalité, écrite sous la forme

$$\langle \sigma + Vg(\sigma) - \sigma, \tau - \sigma\rangle \leq 0, \quad \forall \tau \in \Sigma$$

exprime donc le fait que $\sigma$ est la projection de $\sigma + Vg(\sigma)$ sur $\Sigma$, d'où le point fixe de $\Phi(g,.)$. ∎

Chaque champ de Nash $\Phi$ induit pour chaque jeu $g$ une dynamique

$$\dot\sigma = \Phi(g,\sigma) - \sigma$$

sur le produit des simplexes $\Sigma$, dont les point stationnaires sont $NE(g)$.
Chaque composante de l'ensemble des points fixes a un indice et la somme des indices est égale à 1 qui est la caractéristique d'Euler du simplexe (Théorème de Poincaré-Hopf, voir Milnor (1965)).
De plus l'indice d'une composante $C$ est indépendante du champ de Nash et est égal au degré sur $C$ de la projection $\pi$ de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{G}$ (Demichelis and Germano (2000), Govidan and Wilson (1997)). Pour le jeu suivant, paramétré par $t$ :

| | $L$ | $R$ |
|---|---|---|
| $T$ | $(t,t)$ | $(0,0)$ |
| $B$ | $(0,0)$ | $(1-t,1-t)$ |

on obtient pour la variété et les dynamiques la situation suivante :

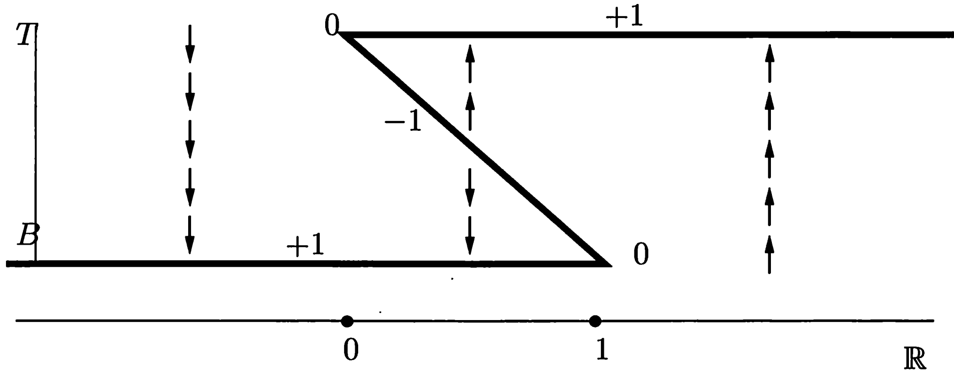



FIG 5.2

## 3. Equilibre et évolution

### 3.1. Dynamique du réplicateur .

On considère un jeu symétrique à 2 joueurs spécifié par une matrice $A$ $(I \times I)$. $A_{ij}$ est la "fitness" (le taux de reproduction) de $i$ dans une interaction $(i, j)$. (Le paiement du joueur 2 est donc $B = {}^t A$.)

La première approche correspond à l'étude d'une population unique et polymorphe de composition $p$ jouant en stratégies pures, une proportion $p^i$ étant de "type $i$".

**Définition 3.1.** *Une population $p \in \Delta(I)$ est stationnaire si*

$$p^i > 0 \Rightarrow iAp = pAp$$

*donc tous les types présents ont le même "taux de reproduction" et la composition de la population reste identique après l'interaction.*

Si $p$ a un support plein, c'est un équilibre symétrique, mais par ailleurs toute stratégie pure est stationnaire.

**Définition 3.2.** *La dynamique du réplicateur (RD) est définie par :*

$$\dot{p}_t = F(p_t)$$

*où $F$ est l'application définie sur $\Delta(I)$ par*

$$F^i(p) = p^i(iAp - pAp).$$

Cette dynamique préserve le simplexe car $\sum_i F^i(p) = pAp - \sum_i p^i pAp = 0$. On peut aussi définir une population stationnaire comme un point stationnaire de la dynamique du réplicateur.

**3.2. RSP.**

Considérons le jeu suivant ("rock, scissors, paper") :

| | $C$ | $B$ | $A$ |
|---|---|---|---|
| $C$ | $(0,0)$ | $(a,-b)$ | $(-b,a)$ |
| $B$ | $(-b,a)$ | $(0,0)$ | $(a,-b)$ |
| $A$ | $(a,-b)$ | $(-b,a)$ | $(0,0)$ |

où $a$ et $b$ sont deux paramètres $> 0$.

**Proposition 3.3.**

*L'unique équilibre de Nash est* $E = (1/3, 1/3, 1/3)$. *C'est un attracteur de la dynamique du réplicateur pour* $a > b$ *et un "répulseur" si* $a < b$.

Preuve : Il n'y a pas d'équilibre en stratégie pure et face à une stratégie ayant un support sur 2 pures, la seule meilleure réponse est pure donc $E$ est l'unique équilibre. Calculons la fitness moyenne pour $p$ dans le simplexe $\Delta(I)$ :

$$\begin{aligned} pAp &= (a-b)(p^1p^2 + p^2p^3 + p^1p^3) \\ &= \frac{(a-b)}{2}(1 - \|p\|^2). \end{aligned}$$

Soit $V(p) = \prod_{i=1}^{3} p^i$, qui est maximal en $E$. Puisque $\dot{p}_t^1 = p_t^1(ap_t^2 - bp_t^3 - p_tAp_t)$, on obtient

$$\frac{d}{dt}\log V(p_t) = \sum\nolimits_{i=1}^{3} \frac{\dot{p}_t^i}{p_t^i} = (a-b) - 3p_tAp_t = \frac{(a-b)}{2}(3\|p_t\|^2 - 1)$$

Donc pour $a > b$, $V$ croît tant que $\|p_t\|^2 \geq 1/3$, ce qui implique la convergence vers $E$.

D'autre part $E$ est un répulseur pour $a < b$. ∎

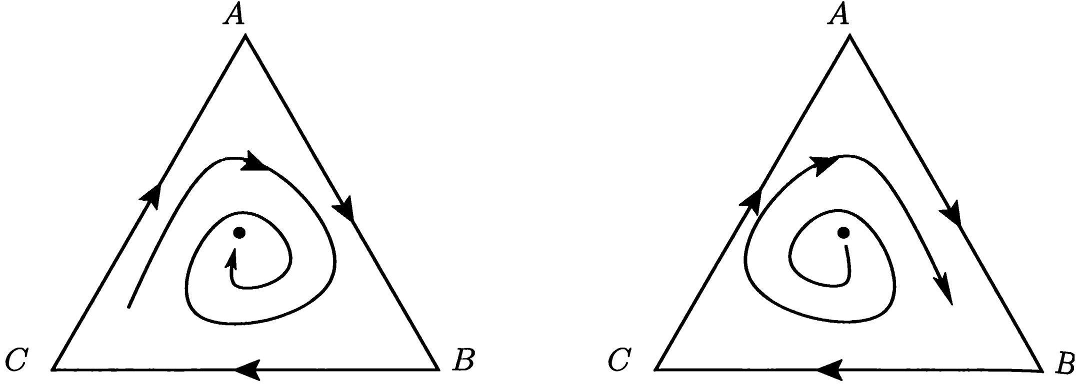



FIG 5.3. : cas $a > b$ ; $a < b$

**3.3. Jeux de potentiel .**

Le cas de jeu de partenaires ($A = {}^tA = B$) est un cas particulier de *jeu de potentiel* (Monderer et Shapley, 1996) : il existe une fonction $\Phi$ de $S$ dans $I\!R^n$ telle que pour tout $i$ et tous $s^i, t^i \in S^i$, $u^{-i} \in S^{-i}$ :

$$G^i(s^i, u^{-i}) - G^i(t^i, u^{-i}) = \Phi(s^i, u^{-i}) - \Phi(t^i, u^{-i}).$$

En particulier la dynamique du réplicateur peut être exprimée directement à l'aide $\Phi$. Explicitement, pour le joueur $i$ et chacune de ses stratégies $s$ :

$$\dot{p}_t^{is} = p_t^{is}[\Phi(s, p_t^{-i}) - \Phi(p_t)].$$

**Proposition 3.4.**

*Pour un jeu de potentiel, $\Phi$ est une fonction de Lyapounov pour la dynamique du réplicateur et les populations stationnaires.*

Preuve : Soit $f_t = \Phi(p_t)$. Donc $\dot{f}_t = \Sigma_i \Phi(\dot{p}_t^i, p_t^{-i})$ par linéarité, mais on a :

$$\Phi(\dot{p}_t^i, p_t^{-i}) = \Sigma_s \dot{p}_t^{is} \Phi(s, p_t^{-i}) = \Sigma_s p_t^{is}[\Phi(s, p_t^{-i}) - \Phi(p_t)]\Phi(s, p_t^{-i}).$$

On ajoute

$$0 = \Sigma_s p_t^{is}[\Phi(s, p_t^{-i}) - \Phi(p_t)]\Phi(p_t)$$

pour obtenir :

$$\Phi(\dot{p}_t^i, p_t^{-i}) = \Sigma_s p_t^{is}[\Phi(s, p_t^{-i}) - \Phi(p_t)]^2$$

et le minorant est 0 pris sur les points stationnaires de (RD). ■

Un exemple important correspond aux *jeux de congestion*, see e.g. Chapter 18 in Nisan & alii (2007) .

### 3.4. ESS.

La notion de stratégie évolutionairement stable ("Evolutionary Stable Strategy", ESS) dûe à Maynard Smith (1982) correspond à l'étude d'une population homogène assexuée qui posssède un "type mixte" $p$ et l'on étudie sa stabilité locale.

**Définition 3.5.** *$p \in \Delta(I)$ est une ESS si elle est robuste face aux perturbations au sens où, pour tout $q \in \Delta(I), q \neq p$, il existe $\varepsilon(q) > 0$ tel que $0 < \varepsilon \leq \varepsilon(q)$ implique*

$$pA((1-\varepsilon)p + \varepsilon q) > qA((1-\varepsilon)p + \varepsilon q).$$

*$\varepsilon(q)$ est la barrière associée à $q$.*

Cette inégalité se décompose en :

$$pAp \geq qAp$$

donc $p$ est un équilibre symétrique, et si il y a égalité

$$pAq > qAq.$$

Un exemple classique d'ESS est un équilibre strict.

**Proposition 3.6.**
*$p$ est un ESS ssi une des conditions suivantes est satisfaite :*
*1) Il existe $\varepsilon_0$ (independant de $q$) tel que*

$$pA((1-\varepsilon)p + \varepsilon q) > qA((1-\varepsilon)p + \varepsilon q)$$

*pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ et tout $q \in \Delta(I), q \neq p$,*
*2) il existe un voisinage $V(p)$ tel que*

$$pAq > qAq, \quad \forall q \in V(p),\ q \neq p.$$

Preuve : Considérons la partie du bord $\partial X$ du simplexe $X = \Delta(I)$ qui fait face à $p$, $\partial X_p = \{q; q \in \partial X$ avec $q^i = 0$ et $p^i > 0$ pour un indice (au moins) $i\}$. Cela forme un ensemble compact disjoint de $p$ sur lequel la barrière $\varepsilon(q)$ est bornée inférieurement par $\varepsilon_0 > 0$.
Maintenant tout $r \neq p$ dans $X$ peut être écrit comme $r = tq + (1-t)p$ avec $t > 0$ et $q \in \partial X_p$ d'où $(1-\varepsilon)p + \varepsilon r = (1-\varepsilon')p + \varepsilon' q$ avec $\varepsilon' \leq \varepsilon$ et donc dès que $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ :

$$pA((1-\varepsilon')p + \varepsilon' q) > qA((1-\varepsilon')p + \varepsilon' q).$$

On a aussi en multipliant par $\varepsilon'$ et en additionnant $(1-\varepsilon')pA((1-\varepsilon')p + \varepsilon' q)$

$$pA((1-\varepsilon')p + \varepsilon' q) > ((1-\varepsilon')p + \varepsilon' q)A((1-\varepsilon')p + \varepsilon' q)$$

qui implique :

$$pA((1-\varepsilon)p+\varepsilon r) > rA((1-\varepsilon)p+\varepsilon r).$$

Ceci termine le point 1.

On vient de voir que sur $\partial X_p$, pour $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ :

$$pA((1-\varepsilon)p+\varepsilon q) > qA((1-\varepsilon)p+\varepsilon q)$$

donc on obtient pour $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ :

$$pA((1-\varepsilon)p+\varepsilon q) > ((1-\varepsilon)p+\varepsilon q)A((1-\varepsilon)p+\varepsilon q).$$

Il reste à remarquer que quand $q$ varie dans $\partial X_p$ et $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ l'ensemble $((1-\varepsilon)p+\varepsilon q)$ décrit un voisinage pointé $V(p) \setminus \{p\}$.

Réciproquement, partant de $q \neq p$, $p' = (1-\varepsilon)p+\varepsilon q$ sera dans $V(p) \setminus \{p\}$ pour $\varepsilon > 0$ assez petit, et alors $pAp' > p'Ap' = [(1-\varepsilon)p+\varepsilon q]Ap'$ d'où l'on déduit :

$$pAp' > qAp'.$$

■

Dans le jeu RSP le seul équilibre est ESS ssi $a > b$ et il n'y a pas d'ESS pour $a < b$ : en effet chaque stratégie pure fait ausi bien que $(1/3, 1/3, 1/3)$ face à $(1/3, 1/3, 1/3)$ et donne 0 face à elle-même alors que $(1/3, 1/3, 1/3)$ induit $(a-b)/3 < 0$.

**Proposition 3.7.**
*$p$ est un ESS ssi $V(x) = \prod_i (x^i)^{p^i}$ est localement une fonction de Lyapounov pour la dynamique du réplicateur.*

Preuve : $V$ a un maximum unique dans $\Delta(I)$ pris en $p$ : en effet l'inégalité de Jensen appliquée au log donne

$$\sum_i p^i \log(x^i/p^i) \leq \log \sum_i x^i = 0.$$

Soit $v_t = \log V(x_t)$. Alors, dans un voisinage de $p$, on a

$$\dot{v}_t = \sum_i p^i \frac{\dot{x}_t^i}{x_t^i} = \sum_i p^i [iAx_t - x_tAx_t]$$
$$= pAx_t - x_tAx_t > 0.$$

■

Pour une étude des jeux d'évolution voir Hammerstein et Selten (1994), Hofbauer et Sigmund (1998), van Damme (1994), Weibull (1995).

CHAPITRE 6

# Jeux sous forme extensive

Un jeu sous forme extensive décrit de manière précise les règles du déroulement du jeu : qui joue, quand, quels sont ses choix et quelle est son information sur le passé de la partie.

## 1. Jeux à information parfaite

Un jeu à information parfaite correspond au cadre le plus naturel et le plus simple. Son analyse a des applications très variées : théorie descriptive des ensembles, logique, informatique, économie ...

La façon la plus simple de visualiser ce modèle est de penser à un jeu de société comme les échecs. Il s'agit d'un jeu où les joueurs jouent séquentiellement suivant un ordre bien défini. Au moment où un joueur doit jouer il sait tout ce qui s'est passé. A la fin du jeu les joueurs reçoivent un paiement qui dépend de toute la suite des coups.

### 1.1. Description.

Un *jeu sous forme extensive à information parfaite* $G$ est décrit à l'aide d'un arbre orienté fini sans cycle. Il est défini par :

(1) Un ensemble de *noeuds* $T$

(2) Une *origine* $\theta \in T$

(3) Une application *prédécesseur* $\phi$ de $T \setminus \{\theta\}$ dans $T$

(4) Des noeuds *terminaux* $R = T \setminus Im(\phi)$ ou résultats

(5) Des *positions* $P = T \setminus R = Im(\phi)$

(6) Une *partition* $\{P_i, i \in N\}$ de $P$.

où $N$ est l'ensemble des joueurs.

On note $S(p) = \phi^{-1}(p)$ les successeurs de $p$ : c'est l'ensemble des noeuds dont $p$ est le prédécesseur.

*Déroulement du jeu :*

(1) Soit $i \in N$ le joueur tel que $\theta \in P_i$.

(2) Le joueur $i$ commence le jeu. Il choisit un successeur $p_1$ de $\theta$.

(3) Inductivement, soit $j \in N$ tel que $p_t \in P_j$. Le joueur $j$ joue au noeud $p_t$ (étape $t+1$). Il choisit un successeur de $p_t$, $p_{t+1} \in S(p_t)$.

(4) Le résultat est l'élément de $R$ atteint par cette procédure, il correspond à une partie.

(5) Chaque résultat induit un paiement pour chaque joueur.

Tout noeud $p$ définit une *histoire* précédant $p$ (la suite des prédecesseurs itérés) et un *sous-jeu* suivant $p$, noté $G[p]$, qui est la famille de ses successeurs successifs. Notons que $G[p]$ est aussi un jeu sous forme extensive à information parfaite, d'origine $p$.

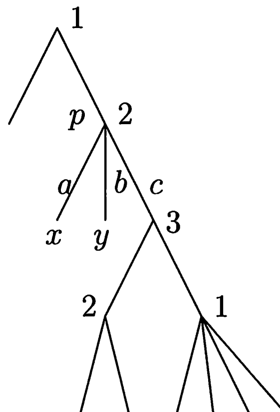



FIG. 6.1 : Jeu sous forme extensive à information parfaite.

Le joueur 1 commence. Il a deux actions : gauche et droite. S'il choisit l'action droite, le noeud $p$ est atteint où le joueur 2 a le choix entre les actions $a, b, c$. S'il choisit l'action $a$ on atteint le noeud terminal $x \in R$, etc ...

### 1.2. Stratégie et forme normale.

Une stratégie $\sigma^i$ du joueur $i$ est définie sur $P_i$ et associe à toute position $p \in P_i$ un successeur. Un profil de stratégies $\sigma = (\sigma^1, ..., \sigma^N)$ induit inductivement une partie, donc un résultat $r$ dans $R$.

Ainsi dans le jeu 2 ci-dessous, le joueur 1 a deux stratégies $S^1 = \{\alpha, \beta\}$ et le joueur 2 en a $3 \times 2 = 6$ : $S^2 = \{aA, aB, bA, bB, cA, cB\}$. La stratégie $bA$ du joueur 2 signifie qu'il choisit l'action $b$ au noeud $p$ et l'action $A$ au noeud $q$.

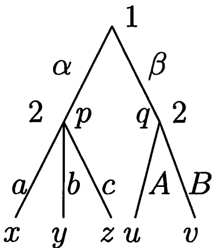



FIG. 6.2 : Jeu 2 sous forme extensive à information parfaite.

**Définition 1.1.** *L'application $F$ qui associe à chaque profil de stratégies $\sigma$ un résultat dans $R$ est appelée la réduction sous forme normale ou stratégique.*

La forme normale du jeu 2 est

| | $aA$ | $aB$ | $bA$ | $bB$ | $cA$ | $cB$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha$ | $x$ | $x$ | $y$ | $y$ | $z$ | $z$ |
| $\beta$ | $u$ | $v$ | $u$ | $v$ | $u$ | $v$ |

Pour achever la définition du jeu, il faut associer à chaque élément dans $R$ un paiement pour chaque joueur.

### 1.3. Jeux déterminés.

Un jeu à deux joueurs et à information parfaite est *simple* s'il existe une partition $(R_1, R_2)$ de $R$ tel que si le résultat est dans $R_i$ le joueur $i$ gagne et l'autre joueur perd. Le joueur $i$ a une *stratégie gagnante* s'il peut forcer un résultat dans $R_i$ :

$$\exists\, \sigma^i, \quad \forall\, \sigma^{-i} \qquad F[\sigma] \in R^i.$$

**Définition 1.2.** *Un jeu est déterminé si un des joueurs a une stratégie gagnante.*

**Théorème 1.3** (Zermelo, 1912).
*Tout jeu fini à deux joueurs et à information parfaite simple est déterminé.*

<u>Preuve</u> : La démonstration procède par induction sur la longueur $n$ de l'arbre. Adoptons la convention qu'un jeu determiné a la valeur $+1$ si le joueur 1 a une stratégie gagnante et $-1$ si le joueur 2 a une stratégie gagnante.

Un jeu en une étape (donc avec un seul joueur) est clairement déterminé : si le joueur en question possède une action qui lui permet de gagner il la joue, sinon c'est l'autre qui gagne sans rien faire.

*Preuve 1 : Induction "aval" (forward)*
Les successeurs de l'origine définissent des sous-jeux de longueur $\leq n-1$ donc ils sont déterminés. Si le joueur 1 commence, il lui suffit de choisir le sous jeu qui a la plus grande valeur. Si celle-ci est +1, il gagne, sinon il perd quoi qu'il fasse. Si c'est le joueur 2 qui commence, il lui suffit de choisir le sous jeu avec la plus petite valeur. Si celle-ci est -1, il gagne sinon il perd quoi qu'il fasse.

*Preuve 2 : Induction "amont" (backward)*
Les noeuds prédécesseurs des noeuds terminaux correspondent à des jeux en une étape et sont donc déterminés. On remplace chacun par un noeud terminal ayant cette valeur. Le nouveau jeu est de longueur strictement inférieure et par récurrence il est déterminé. Par ailleurs si un des joueurs est gagnant dans le nouveau jeu, il l'est aussi dans le jeu initial (par concaténation de stratégies gagnantes). ■

Supposons que l'ensemble des résultats $R = \{r_1 \succ_1 r_2 ... \succ_1 r_n\}$ soit ordonné selon les préférences du joueur 1 (on identifie les résultats où le joueur 1 est indifférent). Un jeu à deux joueurs est dit *strictement compétitif* si le joueur 2 a exactement les préférences inverses sur $R$ : $r_1 \prec_2 r_2 ... \prec_2 r_n$.
Le jeu est *determiné* s'il existe $k$ tel que le joueur 1 peut forcer l'ensemble $\{r_1, r_2, , .., r_k\}$ et le joueur 2 peut forcer $\{r_k, r_{k+1}, , .., r_n\}$.
Si les résultats sont interprétés comme étant les paiements du joueur 1 et si le jeu est à deux joueurs et à somme nulle, la détermination du jeu est équivalente à dire que le jeu a une valeur (qui serait donc $r_k$).

**Corollaire 1.4.**
*Tout jeu fini à information parfaite à deux joueurs et strictement compétitif est déterminé.*

Preuve : Posons $R_m = \{r_1, ..., r_m\}$ et $R_0 = \emptyset$. Soit $R_k$ le plus petit ensemble $R_m$, $m = 1, ..., n$ que le joueur 1 peut forcer. Puisque le joueur 1 ne peut pas forcer $R_{k-1}$, le joueur 2 peut forcer son complémentaire $\{r_k, r_{k+1} ..., r_m\}$. ■

**Application :** le jeu d'échec est un jeu à information parfaite, fini, qui admet seulement trois résultats possibles. Il est donc déterminé, ce qui implique que soit un des deux joueurs peut, en jouant de manière optimale, être certain de gagner, soit les deux peuvent (en jouant bien) forcer au pire un match nul. Cependant, la complèxité de ce jeu est telle qu'on ne sait pas quel joueur a un avantage.

### 1.4. Le joueur hasard.

Dans plusieurs situations (comme le bridge ou le poker), certaines transitions peuvent être la conséquence d'un processus aléatoire exogène qui suit une certaine loi de probabilité $P$ (par exemple la répartition des cartes entre les joueurs). Il est facile d'étendre notre modèle de base en rajoutant un nouveau joueur : le joueur 0 (qui va jouer le rôle du joueur hasard ou de la nature). On doit simplement spécifier en plus dans la description du jeu les noeuds où le joueur hasard va intervenir et avec quelles probabilités les transitions se font vers les successeurs immédiats.

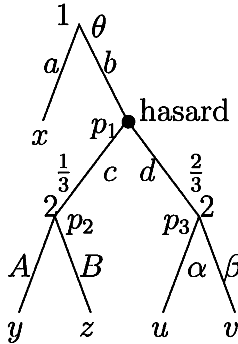



FIG. 6.3 : Jeu sous forme extensive à information parfaite avec le joueur hasard

Dans le jeu ci-dessus, si le joueur 1 choisit l'action $b$ pour son premier coup au noeud origine $\theta$ alors, le hasard (chance) choisit l'action suivante ($c$ ou $d$) suivant la distribution de probabilité $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Ainsi, avec probabilité $\frac{1}{3}$ le jeu arrive au noeud $p_2$ où c'est encore au tour du joueur 1 de jouer et avec probabilité $\frac{2}{3}$ le jeu arrive au noeud $p_3$ où c'est au joueur 2 de jouer. Le couple de stratégies $(bA, \beta)$ induit la distribution $\frac{1}{3}y + \frac{2}{3}v$ sur les résultats.

**Proposition 1.5.**
*Tout jeu fini à information parfaite à deux joueurs à somme nulle et hasard admet une valeur en stratégies pures.*

Preuve : Faisons la preuve par induction aval.

Si le hasard commence, pour chaque choix aléatoire possible $k$ (avec probabilité $p_k$), l'hypothèse de récurrence implique que le sous jeu a une valeur $v_k$ et les joueurs des stratégies optimales pures $(s^k, t^k)$. Le jeu de départ a donc une valeur $v = \sum_k p_k v_k$ et une stratégie optimale $s = (s^k)$ pour le joueur 1 et $t = (t^k)$ pour le joueur 2.

Si le joueur 1 commence, chaque sous jeu possible $k$ a une valeur $v_k$ et des stratégies optimales pures $(s^k, t^k)$. La valeur du jeu est $\max_k v_k$. Pour assurer $v$, il suffit au joueur 1 de commencer par jouer $l$ avec $v_l = \max_k v_k$ puis de jouer suivant $s^l$. De même, $t = (t^k)$ est une stratégie optimale du joueur 2.

Si le joueur 2 commence, la valeur est $\min_k v_k$ et le résultat est dual. ∎

### 1.5. La forme normale réduite.

Dans le jeu suivant le joueur 1 contrôle deux noeuds et possède à chacun deux actions : il a donc 4 stratégies : $S^1 = \{A\alpha, A\beta, B\alpha, B\beta\}$ et le joueur 2 joue seulement à un noeud et a deux stratégies : $S^2 = \{a, b\}$.

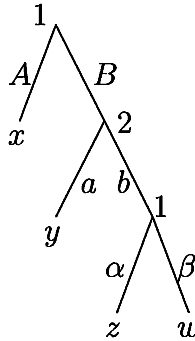



FIG. 6.4. : Forme normale réduite

La forme normale est représentée sur l'espace des résultats par :

| | $a$ | $b$ |
|---|---|---|
| $A\alpha$ | $x$ | $x$ |
| $A\beta$ | $x$ | $x$ |
| $B\alpha$ | $y$ | $z$ |
| $B\beta$ | $y$ | $w$ |

On remarque que les stratégies $A\alpha$ et $A\beta$ du joueur sont équivalentes en un sens très robuste : quelque soit la stratégie du joueur 2, la distribution sur les parties (et donc les résultat associés) est la même pour les deux stratégies. En effet, ces stratégies ne diffèrent que sur des positions qui ne peuvent pas être atteintes étant donnée la spécification par ailleurs ces stratégies. La *forme normale réduie* du jeu 4 est donc

| | $a$ | $b$ |
|---|---|---|
| $A$ | $x$ | $x$ |
| $B\alpha$ | $y$ | $z$ |
| $B\beta$ | $y$ | $w$ |

En général, deux stratégies $s^i$ et $t^i$ du joueur $i$ sont é*quivalentes* si pour tout $s^{-i} \in S^{-i}$, $g^i(s^i, s^{-i}) = g^i(t^i, s^{-i})$. Dans la réduction du jeu, les stratégies équivalentes sont identifiées.

### 1.6. Equilibre et équilibre $S$-parfait.

Les résultats et preuves précédents s'étendent facilement aux jeux à $N$ joueurs.
La construction via l'induction amont donne lieu à énoncé plus précis suivant.

**Définition 1.6.** *Un profil de stratégies $\sigma$ est un équilibre $S$-parfait si pour toute position $p$, la stratégie $\sigma[p]$ induite par $\sigma$ dans le sous jeu $G[p]$ définit un équilibre de Nash dans ce sous-jeu.*

**Théorème 1.7.**
*Tout jeu fini à information parfaite avec (ou sans) joueur hasard admet un équilibre $S$-parfait en stratégies pures.*

Preuve : On applique la méthode d'induction amont. ∎

**Application :** résolvons le jeu ci-dessous par induction amont :

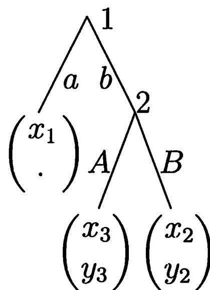



FIG. 6.5. : Induction amont.

Au noeud qu'il contrôle, le joueur 2 choisit $A$ si $y_3 > y_2$. Le joueur 1 choisit alors $b$ si $x_3 > x_1$ et $(b, A)$ est alors l'unique équilibre $S$-parfait. Par ailleurs dès que $x_1 > x_2$, le couple $(a, B)$ est un équilibre.
La forme normale est :

| | $A$ | $B$ |
|---|---|---|
| $a$ | $x_1, .$ | $x_1, .$ |
| $b$ | $x_3, y_3$ | $x_2, y_2$ |

**Proposition 1.8.**
*Génériquement, un jeu fini à information parfaite (avec ou sans le joueur hasard) admet un unique résultat induit par un équilibre $S$-parfait pur.*

Preuve : Si le jeu ne contient pas de joueur hasard et tous les paiements sont deux à deux différents, un joueur n'est jamais indifférent lors de l'induction amont. Donc il y a un seule histoire $S$-parfaite.
Si le jeu contient le joueur hasard, en perturbant s'il le faut les probabilités du joueur hasard ou les paiements des joueurs, aucun joueur ne sera indiférent. L'ensemble des jeux avec plus d'un résultat induit par un équilibre sous-jeu parfait a une probabilité nulle si les paiements sont choisis au hasard (par exemple uniformément dans $[0,1]$). ■

**Remarque**
La proposition précédente ne s'applique pas aux équilibres de Nash :
- Ils ne sont pas géneriquement en nombre fini.
- Les issues correspondantes sont génériquement en nombre fini (Kreps et Wilson, 1982) mais pas necéssairement impair.
Dans le jeu suivant il y a deux composantes d'équilibre et deux issues stables par perturbation de paiements sous la forme extensive.

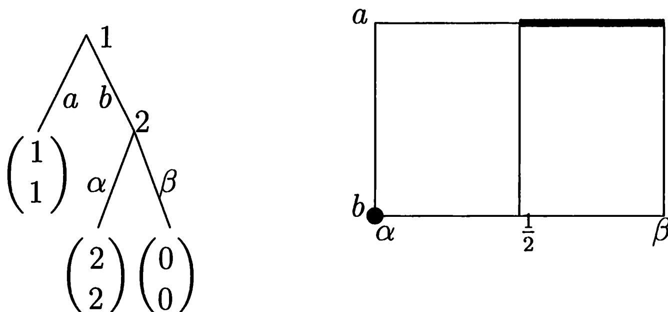



FIG. 6.6. : Equilibre générique sous forme extensive.

### 1.7. Jeux infinis.

L'hypothèse de finitude dans le théorème de Zermelo est essentielle et porte à la fois sur les ensembles de choix et la durée du jeu.
Le jeu suivant à un joueur n'a pas d'équilibre :

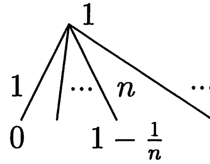


FIG. 6.7.

Gale et Stewart (1953) ont introduit le jeu suivant. Deux joueurs choisissent alternativement un élément dans $\{0,1\}$. Cela engendre une suite infinie $(x_1, x_2, ...)$ qui peut être vue comme le développement binaire d'un nombre $x$ dans $[0,1]$ : $x = \sum_i x_i/2^i$. Etant donné un sous-ensemble $A \subset [0,1]$, le joueur 1 gagne dans le jeu $G_A$ si et seulement si le résultat est dans $A$.

**Théorème 1.9.** *(Gale et Stewart, 1953)*
*Si $A$ est ouvert ou fermé, le jeu $G_A$ est déterminé.*
*Il existe des ensembles $A$ pour lesquels le jeu $G_A$ n'est pas déterminé.*

Preuve : Supposons que $A$ soit ouvert (une base d'ouverts est donné par les suites de début fixé) et que le joueur 1 n'ait pas de stratégie gagnante. Donc pour tout choix $x_1$ du joueur 1, il existe un choix $x_2$ du joueur 2, tel que le joueur 1 n'ait pas de stratégie gagnante dans le sous jeu suivant $x_1 x_2$. Inductivement ceci définit pour chaque $x_{2n+1}$, un élément $x_{2n+2}$ tel que le joueur 1 n'a pas de stratégie gagnante dans le sous jeu suivant $x_1, ..., x_{2n+2}$. Cette procédure produit (partiellement) une stratégie $\tau$ du joueur 2 qui est gagnante. Sinon, soit $\sigma$ gagnant face à $\tau$ donc $(\sigma, \tau)$ génère une partie $h \in A$. $A$ étant ouvert on a déjà que le sous jeu prolongeant $h_{2n}$ est dans $A$, pour un certain $n$. Ceci contredit la construction de $\tau$.
Si $A$ est fermé et que le joueur 2 n'a pas de stratégie gagnante, il existe un coup initial $x_1$ du joueur 1 tel que le joueur 2 n'a pas de stratégie gagnante dans le sous jeu issu de $x_1$. Mais par dualité, ce jeu est ouvert pour lui et la preuve précédente implique que le joueur 1 y a donc une stratégie gagnante, d'où le résultat par concaténation. ■

Ce résultat d'existence a été amélioré par plusieurs auteurs et notamment Martin (1975) qui a montré que pour tout borélien $A$, le jeu est déterminé.
Le jeu de Gale et Stewart a des applications fondamentales en théorie descriptive des ensembles, logique et informatique théorique.
On remarque que si on écrit $x \in A$ comme une proposition $P(x_1, x_2, ...)$, l'existence

d'une stratégie gagnante pour le joueur 1 devient :

$$(Q_1) \qquad \exists x_1, \forall x_2, \exists x_3, \forall x_4, \cdots \text{ tel que } P(x_1, x_2, ...) \text{ est vraie}$$

et que la détermination du jeu dit que $NON(Q_1)$ implique

$$(Q_2) \qquad \forall x_1, \exists x_2, \forall x_3, \exists x_4, \cdots \text{ tel que } P(x_1, x_2, ...) \text{ est fausse.}$$

## 2. Jeux à information imparfaite

Dans plusieurs situations réelles, un des joueurs ne connait pas, au moment où il doit jouer, toute l'histoire passée du jeu. Par exemple, dans le jeu de poker, un joueur n'est pas informé des mains de ses adversaires. Par ailleurs la description de la section précédente ne permet pas de représenter les jeux "simultanés".

### 2.1. Ensembles d'information .

L'information du joueur $i$ est représentée par une partition de $P_i$ en ensembles d'information $P_i^k$. Les noeuds d'un même ensemble d'information sont indistinguables pour le joueur qui y joue. Ils doivent donc avoir le même nombre de successeurs et des actions correspondantes qui définissent une classe d'équivalence sur les successeurs des positions dans un ensemble d'information.
Voici deux représentations de Matching Pennies :

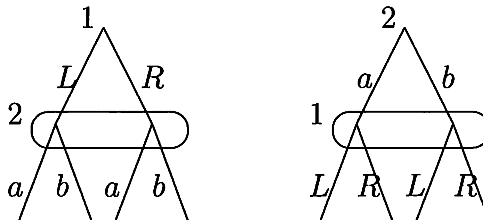



FIG. 6.8. : Deux représentations de Matching Pennies

La représentation par un arbre est parfois trompeuse. On ne peut plus désormais associer à l'aide d'une horloge publique, un temps à chaque ensemble d'information. Dans le jeu suivant le joueur 1 téléphone au joueur 2 puis au joueur 3 en cas de réponse négative, ou inversement, mais n'indique pas ce choix à son interlocuteur.

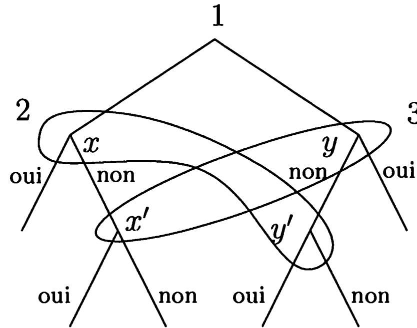



FIG. 6.9. : Absence d'horloge publique

La position $x'$ est dans le temps après la position $x$ et de même $y'$ après $y$, mais l'appartenance au même ensemble d'information impose que $y$ et $x'$ sont atteints à la même date.

### 2.2. Réduction sous forme normale.

Une *stratégie pure* pour le joueur $i$ est une application qui associe à chaque ensemble d'information $P_i^k$ du joueur $i$ une classe d'équivalence de successeurs $q \in S(P_i^k)$. Un profil de stratégies induit une partie, donc un résultat, et on a comme dans le cas d'information parfaite une réduction sous forme normale.

Cependant, deux formes extensives ayant la même forme normale peuvent avoir des histoires fondamentalement différentes comme le montrent les trois jeux suivants.

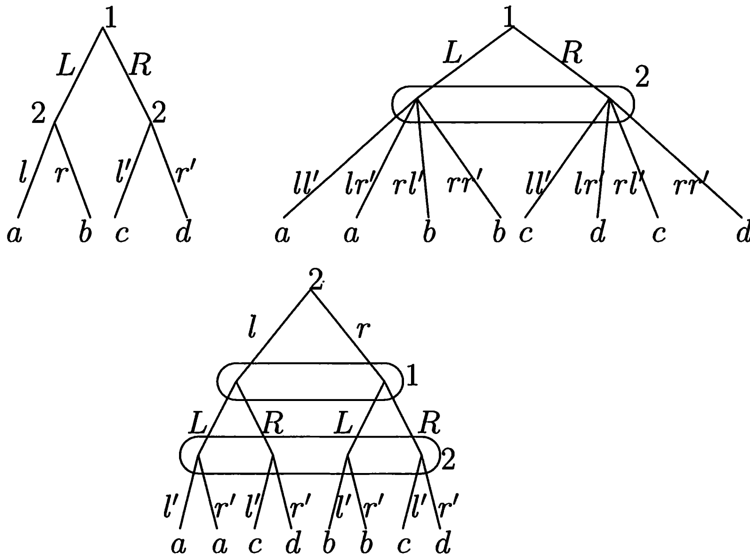



FIG. 6.10. : Différentes représentations sous forme extensive

La représentation sous forme normale est

| | $\ell\ell'$ | $\ell r'$ | $r\ell'$ | $rr'$ |
|---|---|---|---|---|
| $L$ | $a$ | $a$ | $b$ | $b$ |
| $R$ | $c$ | $d$ | $c$ | $d$ |

Par ailleurs nous allons voir dans la section suivante que cette “réduction” est parfois inadéquate.

### 2.3. Stratégies.

L’existence d’ensembles d’information ne permet pas à un joueur d’associer à une position $p$ l’histoire qui y conduit ou le sous jeu qui en est issu. En particulier les démonstrations obtenues via induction amont ou aval ne s’appliquent plus. Par ailleurs il est clair qu’il n’y a plus existence de stratégies pures optimales, voir FIG 6.8.. On est donc amené à considérer des classes plus larges.

Pour chaque joueur $i$, soit $S^i$ l’ensemble de ses stratégies pures.

L’ensemble des *stratégies mixtes* pour le joueur $i$ est $\Sigma^i = \Delta(S^i)$ : une stratégie mixte est un choix aléatoire d’une stratégie pure.

On pourrait imaginer une autre façon de probabiliser entre les actions qui soit plus en accord avec l’aspect séquentiel. Le joueur $i$ choisit au hasard, à chaque fois qu’il se trouve à un ensemble d’information $P_i^k$, parmi les actions disponibles à ce moment.

Une *stratégie de comportement* est donc une application qui associe à chaque ensemble d'information $P_i^k$ une probabilité sur les actions qui y sont possibles (la classe d'équivalence des successeurs). Soit $\mathcal{C}^i$ cet ensemble.
Enfin une *stratégie générale* est un choix aléatoire de stratégie de comportement et on pose $\mathcal{G}^i = \Delta(\mathcal{C}^i)$.

Dans le jeu suivant à un joueur, il y a deux stratégies pures $a$ et $b$ qui induisent les résultats $x$ et $z$. Utiliser des stratégies mixtes permet d'obtenir toutes les distributions sur $(x, z)$. Une stratégie de comportement est définie par la probabilité $t$ de choisir $a$ dans l'ensemble d'information. Elle induit la distribution $(t, t(1-t), (1-t)^2)$ sur les noeuds terminaux $(x, y, z)$ ; en particulier $(1/2, 1/4, 1/4)$ qu'une stratégie mixte ne peut pas atteindre.

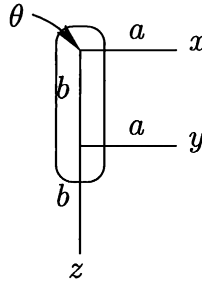



FIG. 6.11. : Comportementale non mixte

Dans l'exemple suivant le joueur contrôle deux ensembles d'information et a 4 stratégies pures : $Ll, Lr, Rl, Rr$. L'utilisation de stratégies mixtes permet d'obtenir toutes les distributions sur les issues $(x, y, z, w)$. Une stratégie de comportement est définie par les 2 probabilités $s = P(L)$ et $t = P(l)$. Elle induit une distribution sur les issues qui satisfait $P(x)P(w) = P(y)P(z)$.

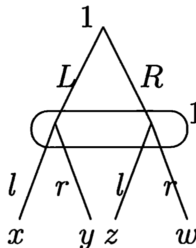



FIG. 6.12. : Mixte non comportementale

Donc en général aucun des ensembles de stratégies mixtes ou de comportement ne contient l'autre.

En particulier, dans le jeu suivant (Isbell, 1957)

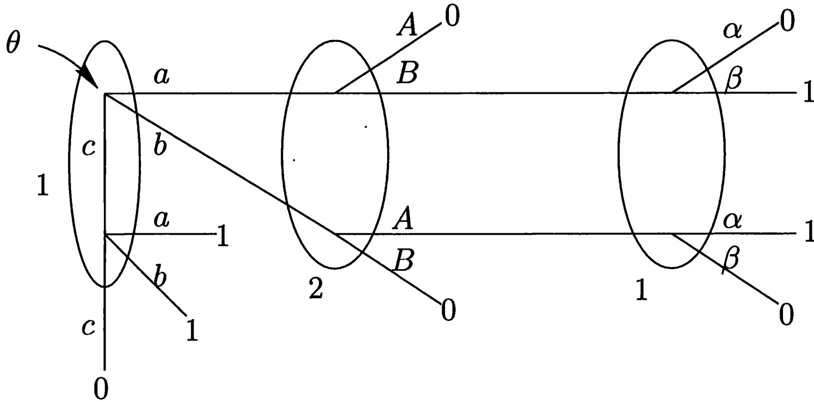



FIG. 6.13. : Le jeu d'Isbell

les stratégies pures garantissent au plus 0 au joueur 1,
les stratégies de comportement garantissent au plus 25/64,
les stratégies mixtes garantissent au plus 1/2,
la stratégie générale $(1/2, 1/2)$ sur $(3/4, 0, 1/4; 0, 1)$ et $(0, 3/4, 1/4; 1, 0)$ garantit 9/16.

### 2.4. Mémoire parfaite.

On introduit ici des conditions sur le jeu qui permettent de comparer stratégies mixtes et stratégies de comportement.

**Définition 2.1.** *Un jeu sous forme extensive est linéaire pour le joueur i s'il n'existe aucune partie qui traverse plus d'une fois un ensemble d'information du joueur i.*

Noter que les jeux 6.11 et 6.13 ne sont pas linéaires.

**Théorème 2.2** (Isbell, 1957).
*Si le jeu est linéaire pour le joueur i, pour toute stratégie de comportement $\mu^i$ il existe une stratégie mixte $\sigma^i$ telle que pour tout profil $\theta^{-i}$ des autres joueurs, les distributions induites $\mathbf{P}(\mu^i, \theta^{-i})$ et $\mathbf{P}(\sigma^i, \theta^{-i})$ coincident sur les noeuds terminaux R.*

Preuve : Pour toute stratégie pure $s^i$ on pose :

$$\sigma^i(s^i) = \prod_{k \in K_i} \mu^i[P_i^k, s^i(P_i^k)]$$

où le produit est pris sur la famille $K_i$ des ensembles d'information du joueur $i$. On fixe le comportement (pur) de $-i$ et $s^i$ induit une partie qui travers les ensembles d'information $P_i^k, k \in K_i' \subset K_i$. La probabilité de cette partie sous $\mu^i$ est

$$\prod\nolimits_{k \in K_i'} \mu^i[P_i^k, s^i(P_i^k)]$$

et sous $\sigma^i$ : $\{\sum \sigma^i(\tilde{s}^i); \tilde{s}^i(P_i^k) = s^i(P_i^k), k \in K_i'\}$. Ces deux quantités coincident car un ensemble apparait au plus une fois dans $K_i'$. ∎

La notion de mémoire parfaite signifie qu'un joueur ne perd pas d'information durant le déroulement du jeu. Celle-ci peut être décomposée en deux propriétés :
i) le joueur ne perd pas d'information le concernant : il se rappelle de tout ce qu'il a fait ou non dans le passé.
ii) le joueur ne perd pas d'information sur ce qu'il a su sur les autres ou sur la nature.

**Définition 2.3.** *Le jeu est à mémoire parfaite pour le joueur $i$ si et seulement si pour tout couple $(x, y)$ dans un même ensemble d'information $P_i^k$, si $x'$ est un prédécesseur de $x$ appartenant à un ensemble d'information $P_i^{k'}$ alors :*
*- il existe $y'$ un prédécesseur de $y$ tel que $y' \in P_i^{k'}$.*
*- l'action qui mène de $x'$ à $x$ est dans la même classe d'équivalence que celle qui mène de $y'$ à $y$.*

Il est facile de vérifier que mémoire parfaite implique linéarité mais le jeu 6.12 est linéaire sans mémoire parfaite.

**Théorème 2.4** (Kuhn, 1953).
*Si le jeu est à mémoire parfaite, pour tout joueur $i$ et toute stratégie mixte $\sigma^i$ il existe une stratégie de comportement $\mu^i$ telle que pour tout profil $\theta^{-i}$ des autres joueurs, les distributions induites $\mathbf{P}(\mu^i, \theta^{-i})$ et $\mathbf{P}(\sigma^i, \theta^{-i})$ coincident sur $R$.*

Preuve : Soient $P_i$ un ensemble d'information et $s^i$ une stratégie pure de $i$. On pose $m(P_i) = \{\sum_{s^i} \sigma^i(s^i); \mathbb{P}_{s^i,\theta^{-i}}(P_i) > 0\}$ et $m(P_i; c) = \{\sum_{s^i} \sigma^i(s^i); \mathbb{P}_{s^i,\theta^{-i}}(P_i) > 0, s^i(P_i) = c\}$.
On définit alors

$$\mu^i(P_i; c) = \frac{m(P_i; c)}{m(P_i)}.$$

Soit $t$ un noeud terminal et $\bar{t}$ la partie correspondante. La probabilité de $t$ sous $\sigma^i$ est $m(Q_i)$ où $Q_i$ est l'ensemble d'information contenant $t$. Soit $Q_i^h$ la famille des ensembles d'information de $i$ traversés le long de $\bar{t}$. La mémoire parfaite implique que le passage dans $Q_i^{h+1}$ spécifie le choix $c^h$ d'où : $\mu^i(Q_i^h, c^h) = \mu^i(Q_i^{h+1})$. Donc la probabilité

évaluée avec $\mu^i$ qui est

$$\prod \mu^i(Q_i^h, c^h)$$

induit un produit téléscopique qui se réduit à $m(Q_i)$ ∎

**Corollaire 2.5.**
*Tout jeu fini, sous forme extensive et à mémoire parfaite pour tous les joueurs, est stratégiquement inchangé si les joueurs sont restreints à utiliser seulement leurs stratégies de comportement. En particulier, le jeu admet un équilibre de Nash en stratégies de comportement.*

**Remarque**
L'espace des stratégies de comportement a en général une dimension beaucoup plus petite que celui des stratégies mixtes : Si le joueur $i$ possède $n$ ensembles d'information avec dans chacun d'eux deux actions, il a $2^n$ stratégies pures. La dimension de l'espace des stratégies mixtes est $2^n - 1$ et celle de l'espace des stratégies de comportement est seulement $n$.

## 3. Sélection d'équilibre

Nous considérons désormais seulement des jeux à mémoire parfaite.

### 3.1. Forme extensive.

On veut étendre au cas de jeux à information imparfaite le critère de "rationalité" (au sens de la définition 1.6.) d'un profil de stratégies en tout noeud de l'arbre. Pour cela il faut pouvoir mettre une probabilité appelé *croyance*, sur les différents noeuds $p$ dans un ensemble d'information $Q$ afin de comparer les paiements induits par les différents choix.

Si $Q$ est "irrigué" par $\sigma$ (au sens où $\sigma$ atteint un noeud dans $Q$ avec probabilité positive) la croyance peut être définie par la probabilité conditionnelle. Sinon on introduit un système de croyances $\mu$. $\mu$ est une application qui associe à chaque ensemble d'information $Q$, une probabilité sur les éléments de $Q$.

**Définition 3.1.** *Le couple $(\sigma, \mu)$ est un équilibre S-parfait si :*
*- pour tout ensemble d'information $Q$, $\sigma$ est une meilleure réponse à $(\sigma, \mu)$ dans le jeu à partir de $Q$, précédé par un choix de la nature d'un noeud dans $Q$ selon la distribution $\mu(Q)$.*
*- $\mu$ est compatible avec $\sigma$ au sens où pour tout $Q$ irrigué par $\sigma$, la probabilité conditionnelle induite par $\sigma$ sur $Q$ est $\mu(Q)$.*

La définition précedente dépend de l'ensemble des croyances permis. Sans conditions supplémentaires on obtient les équilibres "weak Bayesiens parfaits" (Fudenberg et Tirole, 1991).

Soit $\Sigma^i$ l'ensemble des stratégies du joueur $i$ et $\Sigma = \prod_i \Sigma^i$. Une stratégie est complètement mixte si toutes les parties ont une probabilité strictement positive (à chaque ensemble d'information, chaque joueur joue chaque action avec une probabilité strictement positive). Sur cet ensemble, noté $int\Sigma$, on n'a pas besoin de système de croyances car chaque ensemble d'information est atteint avec probabilité positive. Soit $\Phi$ la correspondance associant à un profil de stratégies $\sigma$, la famille $\mu$ des croyances sur les ensembles d'information compatibles avec $\sigma$. Cette application est univoque sur $int\Sigma$. Le jeu suivant montre que :

$$\overline{\Phi(int\Sigma)} \neq \Phi(\Sigma)$$

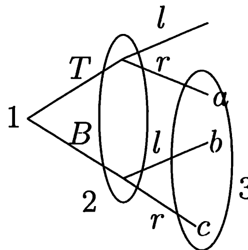



FIG. 6.14. : Adhérence des croyances

En effet si 1 joue $(1-\varepsilon, \varepsilon)$ et 2 joue $(1-\varepsilon, \varepsilon)$ la probabilité sur les noeuds $(a, b, c)$ de l'ensemble d'information de 3 est $((1-\varepsilon)\varepsilon, \varepsilon(1-\varepsilon), \varepsilon^2)$ et la croyance induite converge vers $(1/2, 1/2, 0)$. Mais tout profil de stratégies qui irrigue $a$ et $b$, irrigue ausi $c$.

La notion suivante demande des conditions aux limites sur les stratégies et les croyances.

**Définition 3.2.** *Le profil $\sigma$ est un équilibre séquentiel si il existe $\sigma_n$ dans $int\Sigma$ convergeant vers $\sigma$ tel que les croyances associées $\mu_n$ convergent vers $\mu$ et $(\sigma, \mu)$ est un équilibre S-parfait.*

**Théorème 3.3** (Kreps et Wilson, 1982).
*L'ensemble des équilibres séquentiels est non vide.*

Preuve : Voir sous-section 3.3. ■

**Remarques**

L'exemple ci-dessous montre qu'il n'y a pas de lien entre induction amont et optimalité parétienne. Le seul équilibre $S$-parfait est $[(L,\ell);T]$ et induit le paiement $(1,1)$ alors que $[(R,r);B]$ est un équilibre de paiement $(2,2)$.

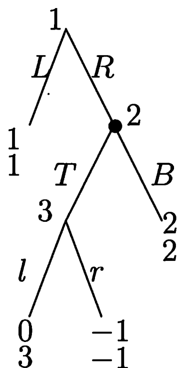



FIG. 6.15. : $S$-parfait et Pareto

L'exemple suivant est le fameux centipède de Rosenthal (1982). Par induction amont le seul équilibre $S$-parfait conduit le joueur 1 à stopper le jeu immédiatement d'où le résultat $(2,1)$. Le "paradoxe" est que si l'intéraction dure sur plus de $n$ positions chaque joueur est sûr d'avoir au moins $n$.
Par ailleurs l'argument qui force 2 à stopper si 1 continue repose sur un comportement rationnel hypothétique du joueur 1 dans le futur...
Pour une approche non ambigue, voir Aumann (1995, 1998).

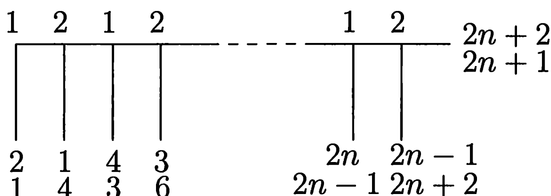



FIG. 6.16. : Jeu du centipède

### 3.2. Forme normale.

Les conditions qui correspondent à $S$-parfait dans un jeu sous forme normale imposent l'élimination des stratégies faiblement dominées.

Dans cette optique, considérons l'approche suivante de sélection d'équilibre dans un jeu fini $G$ sous forme normale.

**Définition 3.4.** *Soit $\varepsilon > 0$. Un profil $\sigma_\varepsilon$ est un équilibre $\varepsilon$-parfait s'il est complètement mixte et si pour tout joueur $i$ et toute stratégie pure $s^i$ du joueur $i$, si $s^i$ n'est pas une meilleure réponse à $\sigma_\varepsilon$ alors $\sigma^i_\varepsilon(s^i) \leq \varepsilon$.*

L'interprétation est que :
1) toutes les actions sont possibles
2) les joueurs font des erreurs mais les stratégies sous-optimales sont jouées avec des probabilités très petites.

**Définition 3.5.** *Un équilibre $\sigma$ est parfait s'il est limite d'une suite $\sigma_n$ d'équilibres $\varepsilon_n$-parfait avec $\varepsilon_n$ qui tend vers 0.*

Selten (1975) a introduit cette notion et en a montré l'existence.
Pour tout $\tau \in int\Sigma$ et tout $\varepsilon > 0$ on définit le *jeu perturbé* $G(\tau;\varepsilon)$ issu de $G$ comme le jeu sur $\Sigma$ de paiement $\sigma \mapsto g((1-\varepsilon)\sigma + \varepsilon\tau)$. Il admet un équilibre, qui est $\varepsilon$-parfait dans le jeu non-perturbé, voir Exercice 6.2.

**Théorème 3.6** (Selten, 1975).
*Tout jeu fini possède un équilibre parfait.*

Cette notion élimine les équilibres dominés (i.e. qui contiennent dans leur support une stratégie faiblement dominée). En effet, une telle stratégie est sous-optimale dans tout équilibre $\varepsilon$-parfait et est donc jouée avec une probabilité qui tend vers zéro quand $\varepsilon$ tend vers zéro.

Dans le jeu 6.6 sous forme normale, seul l'équilibre $S$-parfait est parfait.

**Proposition 3.7.**
*Dans un jeu à deux joueurs les équilibres parfaits sont les équilibres non-dominés. L'inclusion est stricte pour plus de deux joueurs.*

Myerson (1978) a introduit un raffinement des équilibres parfaits.

**Définition 3.8.** *Un profil $\sigma_\varepsilon$ est un équilibre $\varepsilon$-propre d'un jeu sous forme normale $G$ s'il est complètement mixte et si, pour tout joueur $i$ et toutes stratégies pures $s^i$ et $t^i$ dans $S^i$, $g^i(t^i, \sigma_\varepsilon^{-i}) > g^i(s^i, \sigma_\varepsilon^{-i})$ implique $\sigma^i_\varepsilon(s^i) \leq \varepsilon\sigma^i_\varepsilon(t^i)$.*

Les joueurs font des erreurs d'une façon rationnelle au sens où une stratégie $s^i$ est jouée avec une probabilité beaucoup plus petite qu'une meilleure stratégie $t^i$.

**Définition 3.9.** *Un profil est un équilibre propre s'il est limite d'une suite d'équilibres $\varepsilon_n$-propre avec $\varepsilon_n$ qui tend vers 0.*

**Théorème 3.10** (Myerson, 1978).
*Tout jeu fini possède un équilibre propre.*

Preuve : voir Exercice 6.2. ■

Clairement, tout équilibre propre est parfait et donc est non dominé.
L'inverse est faux. Dans l'exemple suivant :

| | $g$ | $m$ | $d$ |
|---|---|---|---|
| $H$ | $(1,1)$ | $(0,0)$ | $(-1,-2)$ |
| $M$ | $(0,0)$ | $(0,0)$ | $(0,-2)$ |
| $B$ | $(-2,-1)$ | $(-2,0)$ | $(-2,-2)$ |

l'équilibre $(H,g)$ est strict donc propre et parfait.
Par ailleurs $M$ est l'unique meilleure réponse à $d$ donc $M$ n'est pas faiblement dominée. De même $m$ est l'unique meilleure réponse à $B$. Donc l'équilibre $(M,m)$ est non dominé et par conséquent parfait.
Cependant cet équilibre n'est pas propre. En effet, $B$ et $d$ sont deux stratégies strictement dominées, par $H$ et $g$ respectivement. Donc pour tout équilibre $\varepsilon$-propre approchant $(M,m)$, la stratégie $H$ (resp. $g$) sera infiniment plus probable que la stratégie $B$ (resp. $d$). Mais, face à une stratégie de la forme $\varepsilon g + (1-\varepsilon-\varepsilon^2)m + \varepsilon^2 d$, l'unique meilleure réponse du joueur 1 est de jouer $H$ (et non $M$).
On remarque que sans les stratégies strictement dominées $B$ et $d$, l'unique équilibre parfait est $(H,g)$. Ajouter des stratégies strictement dominées modifie l'ensemble des équilibres parfaits.

Le même phénomène a lieu avec les équilibres propres.

| | $g$ | $d$ |
|---|---|---|
| $H$ | $(2,1)$ | $(2,1)$ |
| $M$ | $(3,1)$ | $(0,0)$ |
| $B$ | $(0,0)$ | $(1,3)$ |

L'équilibre $(H,d)$ est propre. En effet, $H$ est l'unique meilleure réponse à $d$. En perturbant $d$, $H$ reste l'unique meilleure réponse. Si on perturbe $H$ de la sorte : $(1-\epsilon-\epsilon^2)H + \epsilon^2 M + \epsilon B$, l'unique meilleure réponse du joueur 2 est de jouer $d$. Donc $(H,d)$ est propre. Cependant, en éliminant $B$ (strictement dominée), l'unique équilibre parfait qui subsiste est $(M,g)$.

### 3.3. Liens forme extensive/forme normale.

**Définition 3.11.** *L'"agent normal form" associée à un jeu sous forme extensive est le jeu sous forme normale où à chaque ensemble d'information $Q$ correspond un joueur $i(Q)$ dont les paiement sont ceux du joueur qui joue à $Q$.*

Clairement chaque joueur joue au plus une fois dans chaque partie.

**Théorème 3.12** (Kreps et Wilson, 1982).
*L'ensemble des équilibres séquentiels est non vide.*

Preuve : Partant de l'agent normal form, considérons le jeu perturbé où chaque joueur est restreint à jouer chacune de ses stratégies avec une probabilité au moins égale à $\varepsilon$. Ce jeu contraint est un jeu qui satisfait aux hypothèses du théorème de Glicksberg et admet donc un équilibre de Nash $\sigma_\varepsilon$ (indexé par $\varepsilon$). Cet équilibre induit un $O(\varepsilon)$-équilibre dans le jeu non contraint, où à chaque ensemble d'information, le joueur qui joue maximise son gain à $O(\varepsilon)$-près étant donné sa croyance $\mu_\varepsilon$ induite par $\sigma_\varepsilon$. En prenant une sous suite convergente on obtient un équilibre séquentiel. ∎

**Définition 3.13.** *Un équilibre parfait d'un jeu sous forme extensive est un équilibre parfait de l'agent normal form.*

La compatibilité avec la perfection dans les deux représentations est impossible : Dans le jeu suivant $(R\ell; a)$ est clairement ANF parfait mais non parfait.

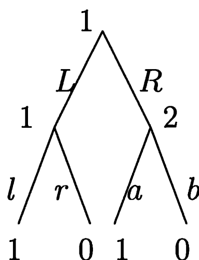



FIG. 6.17. : parfait ANF et non NF

Dans le jeu suivant $Tt$ est parfait sous forme normale mais pas ANF.

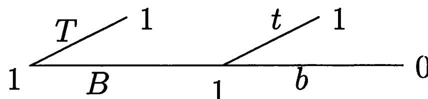



FIG. 6.18. : parfait NF et non ANF

Cependant le résultat suivant établit un lien important entre les deux formes.

**Théorème 3.14** (van Damme, 1984; Kohlberg et Mertens, 1986).
*Un équilibre propre $\sigma$ d'un jeu sous forme normale $G$ induit un équilibre séquentiel $\tau$ dans tout jeu sous forme extensive ayant la forme normale $G$.*

Preuve : $\sigma$ est une limite d'une suite d'$\varepsilon_n$-équilibres propres $\sigma_n$. Soit $y_n$ une stratégie de comportement complètement mixte équivalente à $\sigma_n$. Tout ensemble d'information a une probabilité positive sous $y_n$. Soit $y$ la limite de $y_n$ et pour chaque $n$, soit $\mu_n$ le système de croyances associé à $y_n$. Soit $Q$ un ensemble d'information du joueur $i$ et montrons qu'il y joue une meilleure réponse face à $(y, \mu(Q))$. Sinon il existe une action $b^i$ strictement meilleure qu'une action $a^i$ jouée avec probabilité positive par $y^i$ à $Q$. Cela devrait donc être aussi le cas face à $y_n$ pour $n$ grand. Ceci contredirait le fait que $x_n$ est $\varepsilon_n$-propre car le poids de toute stratégie pure induisant $a_i$ en $Q$ est au plus $\varepsilon_n$ celui de la stratégie pure identique sauf en $Q$ où elle dicte $b^i$. ∎.

Ce résultat est remarquable en ce qu'il montre que l'induction amont (propriété de la forme extensive) peut être détectée par un raffinement de la forme normale.

### 3.4. Induction aval et introduction à la stabilité.

Dans la définition du concept d'équilibre $S$-parfait (induction amont), chaque joueur regarde vers le futur et son comportement est indépendant des choix effectuées dans le passé. Chaque joueur anticipe, pour chacune de ses positions aujourd'hui, les conséquences d'un comportement rationnel des autres joueurs et de lui même dans la suite du jeu. Puis il utilise ces anticipations pour faire un meilleur choix aujourd'hui. Son raisonnement est effectué indépendamment de l'histoire passée.

La notion d'*induction aval*, introduite par Kohlberg et Mertens (1986), consiste à interpréter les actions passées afin de sélectionner parmi les différents équilibres futurs. Ceci peut s'avérer parfois très puissant.

Le jeu suivant se déroule en deux étapes.

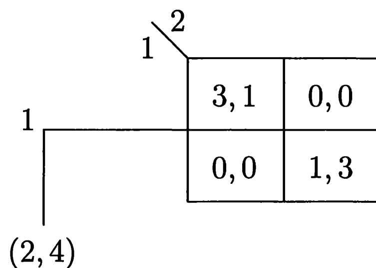



FIG. 6.19.

A la première étape le joueur 1 a le choix entre arrêter (et obtenir 2) ou continuer et alors les 2 joueurs jouent un jeu simultané du type "bataille des sexes". La forme normale est la suivante :

| | $L$ | $R$ |
|---|---|---|
| $S$ | $(2,4)$ | $(2,4)$ |
| $T$ | $(3,1)$ | $(0,0)$ |
| $B$ | $(0,0)$ | $(1,3)$ |

$(S, R)$ est un équilibre propre mais $B$ est dominée.
Si le joueur 1 ne joue pas $S$ le joueur 2 devrait en déduire qu'il vise un paiement plus grand que 2 ; mais alors le seul équilibre dans le sous jeu compatible avec cette exigence est $(T, L)$ induisant (3,1), ce qui justifie alors la déviation du joueur 1.

Cependant il peut y avoir conflit entre des approches intuitives de type "backward" et "forward" induction comme dans le jeu suivant :

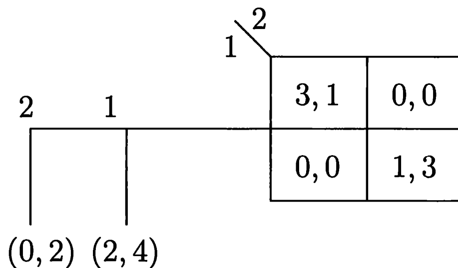



FIG. 6.20.

L'analyse précédente du sous jeu conduit à l'issue (3,1) donc le joueur 2 devrait stopper immédiatement. Par ailleurs, si il continue, il délaisse un paiement de 2 et indique

ainsi son intérêt pour le seul équilibre $(B, R)$ du jeu simultané. Face à cela le joueur 1 joue $S$ et alors le joueur 2 obtient 4 ce qui justifie alors sa déviation.

Kohlberg et Mertens (1986) considèrent un ensemble minimal $C$ d'équilibres de Nash tel que tout jeu perturbé admet un équilibre proche de $C$.

Si la perturbation porte sur les paiements on obtient une composante essentielle minimale, modulo le fait que l'on veut qu'elle le soit pour tout jeu ayant la même forme normale réduite. Cependant ce concept impose de conserver des équilibres non admissibles :

| | $L$ | $R$ |
|---|---|---|
| $T$ | $(2,2)$ | $(2,2)$ |
| $B$ | $(1,1)$ | $(0,0)$ |

$(T, R)$ est dominé mais correspond à un équilibre strict pour un jeu dans un voisinage.

Un autre concept de voisinage consiste à considérer un sous ensemble convexe compact $\Sigma(\delta)$ de l'ensemble des stratégies mixtes dont le complémentaire soit un $\delta$-voisinage de la frontière et l'ensemble des équilibres du jeu contraint correspondant puis sa limite supérieure. Là encore on perd l'admissibilité :

| | $L$ | $R$ | $Z$ |
|---|---|---|---|
| $T$ | $(2,2)$ | $(2,2)$ | $(0,0)$ |
| $B$ | $(1,1)$ | $(0,0)$ | $(0,0)$ |

$R$ devient admissible si elle est moins perturbée vers $Z$ que $L$.

Une approche alternative est pour tout $(\varepsilon, \sigma \in int\Sigma)$ de considérer le jeu perturbé $G(\sigma; \varepsilon)$ au sens de Selten et le voisinage qu'il engendre.

Mertens (1989, 1991) montre alors qu'en imposant de plus des propriétés à la projection de la variété des équilibres sur la base, on peut identifier une composante "stable" qui est non vide, connexe, invariante, admissible, satisfait induction amont et aval ainsi que d'autres propriétés importantes.

Sur ce sujet voir aussi les surveys de Hillas et Kohlberg (2002) et de van Damme (2002).

CHAPITRE 7

# Equilibres corrélés, apprentissage, équilibres bayésiens

## 1. Equilibre corrélé

Cette section est consacré à l'équilibre corrélé, qui est une extension, due à Aumann (1974), de l'équilibre de Nash et qui a de bonnes propriétés stratégiques, géométriques et dynamiques, voir Section 2.

### 1.1. Exemples.

Considérons la classique "bataille des sexes" :

| | |
|---|---|
| 3, 1 | 0, 0 |
| 0, 0 | 1, 3 |

Il y a 2 équilibres purs efficients et disymétriques et un équilibre mixte symétrique et Pareto dominé. L'utilisation d'une pièce permet d'obtenir un équilibre symmétrique et efficient : si "pile" l'issue est $(3,1)$ et $(1,3)$ si "face". Il est clair que face à un tel contrat aucune déviation n'est profitable. Ce mécanisme peut être représenté par la distribution suivante sur les profils d'actions :

| | |
|---|---|
| 1/2 | 0 |
| 0 | 1/2 |

Considérons maintenant le jeu de paiements :

| | g | d |
|---|---|---|
| H | 2, 7 | 6, 6 |
| B | 0, 0 | 7, 2 |

Soit un espace de signaux : $(B, G, N)$, muni de la probabilité uniforme $(1/3, 1/3, 1/3)$. On suppose que les joueurs reçoivent des messages privés et que 1 connait $a = \{B, G\}$ ou $b = \{N\}$ et 2 connait $\alpha = \{B\}$ ou $\beta = \{G, N\}$

Considérons les stratégies :

H si $a$, B si $b$ pour le joueur 1 ;
g si $\alpha$, d si $\beta$ pour le joueur 2.
Elles induisent sur l'espace d'actions $S$ la matrice de corrélation :

| | |
|---|---|
| 1/3 | 1/3 |
| 0 | 1/3 |

et aucune déviation unilatérale n'est profitable.

### 1.2. Structure d'information et jeu étendu.

**Définition 1.1.** *Une structure d'information $\mathcal{I}$ est la donnée :*
*- d'un ensemble d'événements alátoires représenté par un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$*
*- d'une famille d'applications mesurables $\theta^i$ de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $A^i$ (ensemble de signaux du joueur $i$) (ou d'une sous $\sigma$-algèbre $\mathcal{A}^i$ ; dans le cas fini, une partition de $\Omega$).*

Soit $G$ défini par $g : S = \Pi_i S^i \to \mathbb{R}^n$ un jeu stratégique.

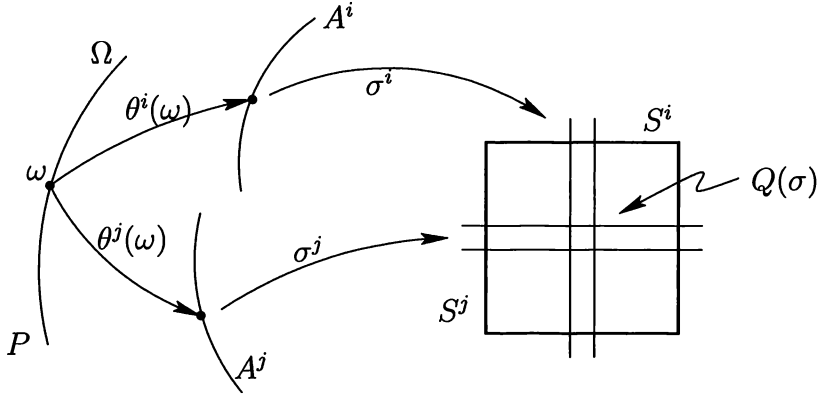
**Définition 1.2.** *Le jeu $G$ étendu par $\mathcal{I}$, noté $[G, \mathcal{I}]$ est le jeu sous forme extensive joué en 2 étapes :*
*étape 0 : la variable aléatoire $\omega$ est tirée suivant la loi $P$ et le signal $\theta^i(\omega)$ est envoyé au joueur $i$.*
*étape 1 : les joueurs jouent dans le jeu $G$.*

Une stratégie $\sigma^i$ du joueur $i$ dans le jeu $[G, \mathcal{I}]$ est une application (mesurable) de $A^i$ dans $S^i$ (ou une application $\mathcal{A}^i$-mesurable de $\Omega$ dans $S^i$). $A^i$ et $S^i$ sont ici munis de tribus (dans le cas fini, la tribu discrète).
Un profil $\sigma$ de telles stratégies est appelé une *stratégie corrélée.*

### 1.3. Equilibre corrélé.

**Définition 1.3.** *Un équilibre corrélé de $G$ est un équilibre de Nash d'un jeu étendu $[G, \mathcal{I}]$.*

Un profil $\sigma$ de stratégies dans $[G, \mathcal{I}]$ transporte la probabilité $P$ sur $\Omega$ en une probabilité $Q(\sigma)$ sur $S$ via la suite : aléa $\to$ signal $\to$ action.




Explicitement pour tout $\omega$, $Q(\omega,\sigma)$ est la probabilité produit sur $S$ égale à $\prod_i \sigma^i(\theta^i(\omega))$ et $Q(\sigma)$ est l'espérance par rapport à la probabilité sous-jacente $P$.

**Définition 1.4.** *$DEC(G)$ est l'ensemble des distributions d'équilibres corrélés dans $G$ :*

$$DEC(G) = \cup_{\mathcal{I},\sigma}\{Q(\sigma); \sigma \text{ équilibre dans } [G,\mathcal{I}]\}$$

Noter que $DEC(G)$ est un ensemble convexe : il suffit de considérer la combinaison convexe des structures d'information.

### 1.4. Corrélés canoniques.

**Définition 1.5.** *Une structure d'information canonique pour $G$ correspond au cas : $\Omega = S$ ; $\theta^i : S \to S^i, \theta^i(s) = s^i$.*
*Cela signifie que $P$ est une probabilité sur le produit $S$ des espaces d'actions et chaque joueur est informé de sa composante.*
*Un équilbre corrélé canonique est un équilibre de $G$ étendu par une structure d'information canonique et où les stratégies d'équilibre sont données par*

$$\sigma^i(\omega) = \sigma^i(s) = \sigma^i(s^i) = s^i$$

*"chaque joueur suit son signal".*

La distribution d'équilibre corrélé canonique ($DECC$) associée est évidemment $P$.

**Théorème 1.6** (Aumann, 1974).

$$DECC(G) = DEC(G)$$

Preuve : Soit $\sigma$ un profil d'équilibre dans une extension $[G, \mathcal{I}]$ et $Q = Q(\sigma)$ la distribution induite.
Alors $Q$ est aussi une $DECC(G)$. En effet on donne à chaque joueur $i$ moins d'information : son coup $s^i$ au lieu du signal $a^i$ tel que $\sigma^i(a^i) = s^i$. Or $s^i$ est une meilleure réponse à la stratégie (correlée) de $-i$ conditionnelle à $a^i$. Il suffit alors d'utiliser la convexité de $BR^i$ sur $\Delta(S^{-i})$. ∎

### 1.5. Caractérisation.

**Théorème 1.7.**
*$Q \in DEC(G)$ s'écrit :*

$$\forall s^i, t^i \in S^i, \forall i = 1, ..., n \qquad \sum_{s^{-i} \in S^{-i}} [g^i(s^i, s^{-i}) - g^i(t^i, s^{-i})] Q(s^i, s^{-i}) \geq 0.$$

Preuve : On peut supposer que $Q \in DECC(G)$. Si $s^i$ est annoncée (i.e. sa marginale $Q^i(s^i) = \sum_{s^{-i}} Q(s^i, s^{-i}) > 0$) on introduit la distribution conditionnelle sur $S^{-i}$, $Q(.|s^i)$, et la condition d'équilibre s'écrit

$$s^i \in BR^i(Q(.|s^i).$$

$s^i$ est une meilleure réponse du joueur $i$ à la distribution conditionnelle à $s^i$ des coups des autres joueurs. ∎

L'approche en termes d'équilibre de Nash du jeu étendu est une approche "ex-ante". La caractérisation précédente correspond à un critère "ex-post".

**Corollaire 1.8.**
*L'ensemble des distributions d'équilibres corrélés est l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points.*

Preuve : Il est défini dans $\Delta(S)$ par une famille finie d'inégalités linéaires larges. ∎

### 1.6. Commentaires.

On peut donner une démonstration élémentaire d'existence d'équilibre corrélé via le théorème du minmax, voir Hart and Schmeidler (1989) et Exercice 8.4.
Il existe des distributions d'équilibres corrélés en dehors de l'enveloppe convexe des distributions d'équilibre de Nash. En effet, considérons le jeu

| | | |
|---|---|---|
| 0,0 | 5,4 | 4,5 |
| 4,5 | 0,0 | 5,4 |
| 5,4 | 4,5 | 0,0 |

Le seul équilibre est symétrique et induit par la stratégie $(1/3, 1/3, 1/3)$ avec paiement 3.
Mais une distribution d'équilibre corrélé est :

| | | |
|---|---|---|
| 0 | 1/6 | 1/6 |
| 1/6 | 0 | 1/6 |
| 1/6 | 1/6 | 0 |

induisant le paiement $9/2$.

Considérons les équilibres corrélés dans un jeu sous forme extensive.
Le joueur 1 choisit entre arrêter, et le paiement est $(2,2)$ ou continuer et le jeu est alors le suivant :

| | |
|---|---|
| $5,1$ | $0,0$ |
| $0,0$ | $1,5$ |

$(3,3)$ est un paiement d' équilibre si le signal public $(1/2, 1/2)$ sur $(a, b)$ (avec la convention $(5,1)$ après $a$ et $(1,5)$ après $b$) est tiré après le choix initial du joueur 1, mais pas si il est connu avant, car alors le joueur 1 dévie si le signal est $a$.

Pour l'étude des équilibres avec des mécanismes plus généraux voir Forges (1986, 1990).

## 2. Procédures de non regret

Soit $\{U_n\}$ une suite de vecteurs dans $\mathcal{U} = [0,1]^K$. A chaque étape $n$, un joueur ayant observé les réalisations précédentes $\{U_1, ..., U_{n-1}\}$ et ses choix passés, choisit une composante $k_n$ dans $K$. Le résultat correspondant est $\omega_n = U_n^{k_n}$.
Une stratégie $\sigma$ dans ce problème de prédiction spécifie à l'étape $n$, la loi de $k_n$ étant donné le passé $h_{n-1} = \{k_1, U_1, ..., k_{n-1}, U_{n-1}\}$, notée $\sigma(h_{n-1}) \in \Delta(K)$.
Le *regret interne* à l'étape $n$ est donné par la matrice $S_n = \{S_n^{k\ell}\}_{k,\ell \in K}$ définie par :

$$S_n^{k\ell} = \begin{cases} U_n^\ell - U_n^k & \text{si } k = k_n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le regret moyen est alors la matrice donnée par :

$$\overline{S}_n^{k\ell} = \frac{1}{n} \sum\nolimits_{m=1, k_m = k}^{n} (U_m^\ell - U_m^k).$$

La composante $k\ell$ compare le paiement moyen du joueur sur les étapes où il a joué $k$ au paiement qu'il aurait eu si il avait joué $\ell$ à toutes ces étapes.

**Définition 2.1.** *Une stratégie $\sigma$ définit une procédure de non regret si pour tout processus $\{U_m\}$ et tout couple $k, \ell$ :*

$$[\overline{S}_n^{k\ell}]^+ \longrightarrow 0 \qquad \text{quand } n \to +\infty \qquad \sigma - p.s.$$

Etant donné $A$, une matrice $K \times K$ à coefficients $\geq 0$, il existe une *mesure invariante* $\mu \in \Delta(K)$ i.e. vérifiant :

$$\sum_{k \in K} \mu^k A^{k\ell} = \mu^\ell \sum_{k \in K} A^{\ell k} \qquad \forall \ell \in K.$$

(Cela suit facilement de l'existence d'une mesure invariante pour une matrice stochastique.)

**Proposition 2.2.**
*Soit $S(.,U)$ la matrice de regret associée à un vecteur $U$. Pour toute matrice $A$ (de taille $K \times K$) et toute mesure $\mu$ invariante pour $A$*

$$\langle A, E_\mu(S(.,U)) \rangle = 0, \quad \forall U \in \mathcal{U}.$$

Preuve :

$$\langle A, E_\mu(S(.,U)) \rangle = \sum_{k,\ell} A^{k\ell} \mu^k (U^\ell - U^k)$$

et le coefficient de chaque $U^\ell$ est

$$\sum_{k \in K} \mu^k A^{k\ell} - \mu^\ell \sum_{k \in K} A^{\ell k} = 0.$$

■

On rappelle le théorème de Blackwell (1956), voir Exercice 3.3., appliqué ici dans le cadre de l'ensemble convexe fermé $D = I\!R^n_-$ :

**Théorème 2.3.**
*Soit $x_n$ une suite de variables aléatoires dans $I\!R^n$ tel que*

$$\langle \bar{x}_n - \Pi_D(\bar{x}_n), y_{n+1} - \Pi_D(\bar{x}_n) \rangle \leq 0.$$

*où $y_{n+1} = E(x_{n+1}|x_1, ..., x_n)$ est l'espérance conditionnelle de $x_{n+1}$ étant donné le passé, et $\Pi_D$ dénote la projection sur $D$. Alors la distance de $\bar{x}_n$ à $D$ tend vers 0 presque sûrement.*

On en déduit :

**Proposition 2.4.**
*Il existe des procédures de non regret.*

Preuve : Considérons le processus des regrets généré par $\sigma$ dans $I\!R^{K^2}$

$$\bar{S}_{n+1} - \bar{S}_n = \frac{1}{n+1}[S_{n+1} - \bar{S}_n]$$

avec $\sigma(h_n) = \mu(\bar{S}_n^+)$.
La condition suffisante d'approchabilité de l'orthant négatif $D$ s'écrit :

$$\langle \bar{S}_n - \Pi_D(\bar{S}_n), E(S_{n+1}|S_1, ..., S_n) - \Pi_D(\bar{S}_n)\rangle \leq 0.$$

Ici on a $\Pi_D(x) = -x^-$ orthogonal à $x^+ = x - \Pi_D(x)$ d'où la condition :

$$\langle \bar{S}_n^+, E_P(S(., U_{n+1}))\rangle \leq 0$$

qui est vérifiée pour $P = \sigma(h_n) = \mu(\bar{S}_n^+)$, d'après la Proposition 2.2, avec $A = \bar{S}_n^+$.

■

Considérons un jeu $G$ joué de manière répétée où à chaque étape les actions choisies sont révélées aux joueurs. Chaque joueur $i$ fait face à l'étape $n$ à un paiement vectoriel (inconnu) $Vg^i(s_n^{-i}) = \{g^i(s^i, s_n^{-i})_{s^i \in S^i}\}$ déterminé par le comportement des autres joueurs.

**Proposition 2.5.**
*Si chaque joueur $i$ suit une procédure de non regret associée à son paiement vectoriel, $U_n(i) = Vg^i(s_n^{-i})$, la distance de la distribution empirique des coups à $DEC(G)$ converge vers 0.*

Preuve : Il suffit de remarquer que si $Q^*$ est un point d'accumulation de la suite des répartitions empiriques d'actions

$$Q^*(s) = \lim_{n_k \to \infty} (\frac{1}{n_k} \#\{1 \leq m \leq n_k; s_m = s\}),$$

la condition de non regret $(S^{k\ell})^+ \leq 0$ s'écrit, par linéarité du paiement :

$$\sum\nolimits_{s^{-i} \in S^{-i}} [g^i(k, s^{-i}) - g^i(\ell, s^{-i})] Q^*(k, s^{-i}) \geq 0$$

qui est la définition de l'équilibre corrélé. ■

En particulier ce résultat implique l'existence de $DEC$ et fournit un algorithme (composée de procédures unilatérales) convergeant vers cet ensemble.
Il n'existe pas de telles propriétés pour l'équilibre de Nash. Pour un survey récent sur ce sujet, voir Hart (2005).

## 3. Jeux à information incomplète (ou "jeux bayésiens")

### 3.1. Stratégies, paiements et équilibre.

Comme dans la Section 1 précédente, on a une structure d'information $\mathcal{I} = (\Omega, \mathcal{A}, P)$, mais le jeu lui-même $\Gamma = G(.)$ dépend de $\omega$ (on peut également permettre à $S^i$ de

dépendre de $\omega$ mais de manière $\mathcal{A}^i$-mesurable).
On appelle parfois espaces des *types*, l'ensemble (fini) des signaux $A^i$ (chaque joueur connaît son type).
Une stratégie $\sigma^i$ du joueur $i$ est une application de $A^i$ dans $\Delta(S^i)$. Le paiement correspondant à un profil $\sigma$ est donné par

$$\gamma(\sigma) = \int_\omega g(\{\sigma^i(\theta^i(\omega))\}_{i\in I}; \omega)P(d\omega)$$

On note $Q$ la probabilité induite sur $A = \Pi_i A^i$ et $g(., a)$ l' espérance conditionnelle de $g(., \omega)$ sur $\theta^{-1}(a)$, l'ensemble des aléas se traduisant par le profil de signaux $a$. Alors le paiement s'écrit encore

$$\gamma(\sigma) = \sum\nolimits_a g(\{\sigma^i(a^i)\}; a)Q(a)$$

soit pour le joueur $i$

$$\gamma^i(\sigma) = \sum\nolimits_{a^i} Q^i(a^i)B^i(a^i)$$

avec

$$B^i(a^i) = \sum\nolimits_{a^{-i}} g^i(\sigma^i(a^i), \{\sigma^j(a^j)\}_{j\neq i}; a)Q(a^{-i}|a^i).$$

Donc si $\sigma$ est un profil d'équilibre, pour chaque joueur $i$ et pour chaque signal $a^i$, $\sigma^i(a^i)$ maximise le gain "bayésien" face à $\sigma^{-i}$ :

$$\sum\nolimits_{a^{-i}} g^i(., \{\sigma^j(a^j)\}_{j\neq i}; (a^i, a^{-i})Q(a^{-i}|a^i).$$

La première maximisation (dans $\gamma$) est "ex-ante", la seconde "ex-post".

### 3.2. Compléments.

Une stratégie pure (resp. de comportement) du joueur $i$ envoie $A^i$ dans $S^i$ (resp. $\Delta(S^i)$).
Une stratégie mixte est une distribution sur les stratégies pures ou bien une application de $A^i \times [0, 1]$ dans $S^i$ où $[0, 1]$ est muni d'une distribution uniforme.
Une *stratégie de distribution* $\mu^i$ est un élément de $\Delta(A^i \times S^i)$ qui respecte les données : la marginale sur $A^i$ est égale à $Q^i$ (Milgrom and Weber, 1985).
La probabilité conditionnelle $\mu^i(.|a^i)$ correspond à une stratégie de comportement.

**Applications** :
i) Chaque joueur fait face à une stratégie mixte même si ses adversaires utilisent des stratégies pures, mais basées sur des informations privées (Harsanyi, 1973a).
ii) Phénomènes de réputation : ce domaine correspond à l'étude des situations où un joueur utilise stratégiquement l'incertitude de son adversaire sur son type, voir par exemple une présentation dans Sorin (1999).

CHAPITRE 8

# Introduction aux jeux répétés

Les jeux répétés représentent les interactions dynamiques en temps discret. Ces interactions sont modélisées à l'aide d'une variable d'état, évoluant selon un processus contrôlé par les joueurs. Concrètement, le jeu se déroule par étapes, et chaque joueur commence par recevoir un signal privé sur l'état initial. Puis à chaque étape, les joueurs choisissent simultanément une action. Les actions choisies ainsi que l'état courant déterminent : 1) les paiements d'étape, et 2) une probabilité de transition sur le nouvel état et les nouveaux signaux reçus par les joueurs.

C'est un modèle très général, et lorsqu'un joueur choisit son action à une certaine étape, de nombreux aspects stratégiques peuvent être simultanément présents : 1) le joueur peut influencer son propre paiement, 2) il peut influencer le processus des états (cet aspect est essentiel dans la classe des *jeux stochastiques*), 3) il peut révéler ou apprendre des informations sur l'état courant (cet aspect est essentiel dans la classe des *jeux répétés à information incomplète*), et enfin 4) il peut influencer les connaissances des joueurs sur le profil d'actions joué à cet étape (cet aspect est essentiel dans la classe des jeux répétés *observation imparfaite*, ou *avec signaux*).

A l'exception de la dernière section, on se restreint ici au cas le plus simple, celui des jeux répétés "non stochastiques à information complète et observation parfaite" : simplement, on répète le même jeu "de base" connu de tous les joueurs, et après chaque étape les actions jouées sont observées. On va présenter un certain nombre de "Folk théorèmes" : ces résultats caractérisent l'ensemble des paiements d'équilibres du jeu répété en fonction des données du jeu de base. Indiquons qu'une partie de ce chapitre repose sur le survey de Forges, Renault, Sorin et Vieille (2006).

## 1. Exemples élémentaires

On considère un jeu répété un nombre fini $T$ de fois, les paiements des joueurs étant donnés par la moyenne arithmétique des paiements des différentes étapes. Repoussons à la section suivante les définitions formelles, et notons dès maintenant $E_T$

l'ensemble des paiements d'équilibres de Nash en stratégies mixtes du jeu répété $T$ fois.

Exemple 1. Le jeu de base est :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} (1,0) & (0,0) \\ (0,0) & (0,1) \end{pmatrix} \end{array}$$

$(1,0)$ et $(0,1)$ sont des paiements d'équilibre de Nash du jeu de base. On peut alors facilement construire un équilibre du jeu en deux étapes de paiement moyen $(1/2, 1/2)$ : les deux joueurs jouent $(H, G)$ à l'étape 1, et $(B, D)$ à l'étape 2.

D' où $(1/2, 1/2) \in E_2$. La répétition permet de convexifier les paiements.

Exemple 2. Le jeu de base est :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} C^2 & D^2 & L^2 \end{array} \\ \begin{array}{c} C^1 \\ D^1 \\ L^1 \end{array} & \begin{pmatrix} (3,3) & (0,4) & (-10,-10) \\ (4,0) & (1,1) & (-10,-10) \\ (-10,-10) & (-10,-10) & (-10,-10) \end{pmatrix} \end{array}$$

L'ensemble des paiements d'équilibres du jeu de base est : $E_1 = \{(1,1), (-10,-10)\}$. On peut construire un équilibre de Nash du jeu en deux étapes de paiement $(2,2)$ de la façon suivante.

A la première étape, le joueur 1 joue $C^1$ et le joueur 2 joue $C^2$. A la seconde étape, le joueur 1 joue $D^1$ si le joueur 2 a joué $C^2$ en date 1, et il joue l'action $L^1$ (que l'on peut ici interpréter comme une *punition*) sinon. Symétriquement, à l'étape 2 le joueur 2 joue $D^2$ si le joueur 1 a joué $C^1$ en date 1, et il joue $L^2$ (*punition*) sinon. Il est facile de voir que l'on a bien défini un équilibre du jeu répété, et donc on a : $(2,2) \in E_2$.

Dans la même veine, on peut montrer que pour tout $T \geq 1$, on a : $\frac{T-1}{T}(3,3) + \frac{1}{T}(1,1) \in E_T$. Ainsi la répétition peut-elle permettre la coopération.

Exemple 3. Le jeu de base est le célèbre "dilemme du prisonnier".

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} C^2 & D^2 \end{array} \\ \begin{array}{c} C^1 \\ D^1 \end{array} & \begin{pmatrix} (3,3) & (0,4) \\ (4,0) & (1,1) \end{pmatrix} \end{array}$$

On peut montrer par récurrence que $E_T = \{(1,1)\}$ pour tout $T$. Il n'y a pas de coopération possible dans ce jeu répété un nombre fini de fois, Sorin (1986a).

## 2. Le modèle

On fixe un jeu sous forme stratégique fini $G = (N, (S^i)_{i \in N}, (g^i)_{i \in N})$, appelé jeu de base. $N$ est l'ensemble des joueurs. Pour chaque joueur $i$ de $N$, $S^i$ est l'ensemble d'actions du joueur $i$ et $g^i$ est une application du produit cartésien $\prod_{j \in N} S^j$ dans $I\!R$ donnant le paiement du joueur $i$. On s'intéresse à la répétition en temps discret, un grand nombre ou une infinité de fois, du jeu de base. Cette durée est connue des joueurs. A chaque étape les joueurs choisissent, éventuellement aléatoirement, simultanément chacun une action dans leur ensemble d'actions, puis ces actions sont observées publiquement avant de passer à l'étape suivante. On note classiquement $S = \prod_{i \in N} S^i$ l'ensemble des profils d'actions, $g = (g^i)_{i \in N}$ la fonction de paiement vectoriel et $\Delta(S)$, resp. $\Delta(S^i)$, est l'ensemble des probabilités sur $S$, resp. sur $S^i$.

### 2.1. Histoires et parties.

On définit l'ensemble des histoires de longueur $t$ comme l'ensemble $H_t$ des $t$-uplets $(s_1, ..., s_t)$ d'éléments de $S$, $H_0$ étant le singleton $\{\emptyset\}$.

$$H_T = \{(s_1, ..., s_T), \forall t \;\; s_t \in S\} = S^T.$$

L'ensemble de toutes les histoires est $H = \cup_{t \geq 0} H_t$, et $H_\infty = S^\infty$ désigne l'ensemble des parties du jeu répété, i.e. des suites $(s_1, ..., s_t, ...)$ d'éléments de $S$.

### 2.2. Stratégies.

**Définition 2.1.** *Une stratégie (de comportement) du joueur $i$ est une application $\sigma^i$ de $H$ dans $\Delta(S^i)$.*

L'interprétation est la suivante : pour tout $h$ dans $H_t$, $\sigma^i(h)$ désigne la loi sur $S^i$ qu'utilise le joueur $i$ pour choisir son action en date $t+1$ si l'histoire $h$ a été jouée aux dates 1,..., $t$.
On note $\Sigma^i$ l'ensemble des stratégies du joueur $i$ et $\Sigma = \prod_{i \in N} \Sigma^i$ l'ensemble des profils de stratégies.
Un profil $\sigma$ induit alors naturellement par récurrence une probabilité sur l'ensemble (dénombrable) des histoires $H$, les tirages aléatoires effectués par les joueurs à chaque étape étant indépendants. Cette probabilité s'étend de façon unique, par le théorème de Kolmogorov, à l'ensemble des parties $H_\infty$ (qui est muni de la tribu produit sur $S^\infty$).

### 2.3. Paiements.

Passons maintenant à l'évaluation des paiements dans le jeu répété, $s_t$ désignant la variable aléatoire du profil d'actions joué en date $t$.

Plusieurs variantes de jeu répété sont classiquement étudiées : les jeux répétés un nombre fini de fois, les jeux escomptés, et les jeux uniformes (on dit aussi jeux non escomptés).

**Jeux finiment répétés $G_T$.**

**Définition 2.2.** *Le paiement moyen d'un joueur i jusqu'à une étape $T \geq 1$ si le profil de stratégies $\sigma$ est joué est :*

$$\gamma_T^i(\sigma) = E_\sigma \left( \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} g^i(s_t) \right).$$

*Pour $T \geq 1$, le jeu répété T fois est le jeu $G_T = (N, (\Sigma^i)_{i \in N}, (\gamma_T^i)_{i \in N})$.*

**Jeux escomptés $G_\lambda$.**

**Définition 2.3.** *Pour $\lambda$ dans $(0,1]$, le jeu escompté au taux $\lambda$ est $G_\lambda = (N, (\Sigma^i)_{i \in N}, (\gamma_\lambda^i)_{i \in N})$, où pour tout profil de stratégies $\sigma$ :*

$$\gamma_\lambda^i(\sigma) = E_\sigma \left( \lambda \sum_{t=1}^{\infty} (1-\lambda)^{t-1} g^i(s_t) \right).$$

Dans cette version, gagner un paiement de $1 - \lambda$ aujourd'hui est équivalent à recevoir le paiement 1 demain. Par ailleurs, remarquons que prendre $T = 1$ dans la définition 2.2 ou $\lambda = 1$ dans la définition 2.3 revient à considérer le jeu “en un coup”'$G$.

**Jeux uniformes $G_\infty$.**

On s'intéresse ici directement aux aspects stratégiques de long terme. L'approche uniforme consiste à définir la notion d'équilibre de la façon suivante :

**Définition 2.4.** *Un profil de stratégies $\sigma$ est un équilibre uniforme de $G_\infty$ si :*

*1) $\forall \varepsilon > 0$, $\sigma$ est un $\varepsilon$-équilibre de Nash de tout jeu finiment répété assez long, i.e. :*

$\exists T_0, \forall T \geq T_0, \forall i \in N, \forall \tau^i \in \Sigma^i, \quad \gamma_T^i(\tau^i, \sigma^{-i}) \leq \gamma_T^i(\sigma) + \varepsilon$, *et*

*2) $\left((\gamma_T^i(\sigma))_{i \in N}\right)_T$ converge vers un vecteur $\gamma(\sigma)$ de $I\!R^N$, qui s'appelle alors un paiement d'équilibre (uniforme) de $G_\infty$.*

On note $E_\infty$ l'ensemble des paiements d'équilibres de $G_\infty$, et $E_T$ (resp. $E_\lambda$) l'ensemble des paiements d'équilibres de Nash de $G_T$ (resp. $G_\lambda$). On peut appliquer le théorème de Nash-Glicksberg à $G_T$ et $G_\lambda$ : $E_T$ et $E_\lambda$ sont compacts et non vides. On montre facilement que $E_\infty$ est également compact, et on a : $E_1 \subset E_T \subset E_\infty$, et $E_1 \subset E_\lambda \subset E_\infty$.

## 3. Les paiements réalisables et individuellement rationnels

**Définition 3.1.** *L'ensemble des paiements réalisables du jeu est* $\operatorname{conv} g(S) = g(\Delta(S))$.

Comparer à Chapitre 4, Section 9.
C'est un polytope qui représente l'ensemble des paiements que l'on peut obtenir dans le jeu répété. Par convexité et compacité, il contient $E_\infty$, et donc $E_T$ et $E_\lambda$.

**Définition 3.2.** *Pour chaque joueur* $i$ *de* $N$*, on définit le niveau de punition du joueur* $i$ *comme :*

$$v^i = \min_{x^{-i} \in \prod_{j \neq i} \Delta(S^j)} \max_{x^i \in \Delta(S^i)} g^i(x^i, x^{-i}).$$

Attention : s'il y a au moins 3 joueurs on peut avoir $\min\max \neq \max\min$ (voir Exercice 2.2).

**Définition 3.3.** *L'ensemble des paiements individuellement rationnels est :*

$$IR = \{u = (u^i)_{i \in N}, u^i \geq v^i \ \forall i \in N\}.$$

*L'ensemble des paiements réalisables et individuellement rationnels est*

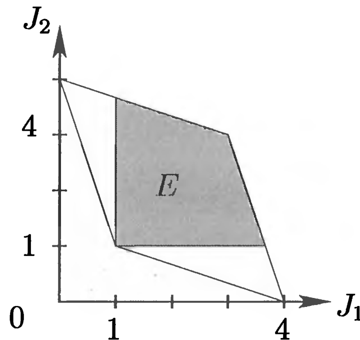
$$E = (\operatorname{conv} g(S)) \cap IR.$$

Etant donné un profil de stratégies $\sigma^{-i}$ des joueurs autres que $i$, il est facile de construire, en utilisant le fait que les actions sont observées après chaque étape, une stratégie $\sigma^i$ du joueur $i$ telle que : $\forall T$, $\gamma^i_T(\sigma^i, \sigma^{-i}) \geq v^i$. On en déduit que $E_\infty$, $E_T$ et $E_\lambda$ sont inclus dans $E$.

Illustrons les définitions précédentes sur le dilemme du prisonnier.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} C^2 & D^2 \end{array} \\ \begin{array}{c} C^1 \\ D^1 \end{array} & \begin{pmatrix} (3,3) & (0,4) \\ (4,0) & (1,1) \end{pmatrix} \end{array}$$

On a $v^1 = v^2 = 1$, et l'ensemble des paiements réalisables et individuellement rationnels est représenté ci-dessous :




## 4. Les Folk théorèmes

Les Folk théorèmes s'intéressent aux jeux répétés joués par des joueurs très patients, et donc aux jeux finiment répétés ayant un grand nombre d'étapes, aux jeux escomptés avec un taux d'escompte proche de 0, et aux jeux uniformes. Ils énoncent essentiellement ceci : *l'ensemble des paiements d'équilibres du jeu répété est l'ensemble des paiements réalisables (i.e. que l'on peut obtenir en jouant) et individuellement rationnels (i.e. tels que chaque joueur a au moins son paiement de punition).* Les versions les plus claires concernent les jeux uniformes.

### 4.1. Les Folk théorèmes pour $G_\infty$.

**Théorème 4.1. "Le" Folk théorème**

*L'ensemble des paiements d'équilibres de $G_\infty$ est l'ensemble des paiements réalisables et individuellement rationnels : $E_\infty = E$.*

Le nom signifie théorème de la communauté, car il est difficile d'établir la paternité de ce résultat élémentaire. Citons R.J. Aumann en 1981 : The Folk theorem " *has been generally known in the profession for at least 15 or 20 years, but has not been published; its authorship is obscure."* Il est appelé aussi le théorème du "tout est possible" : n'importe quel paiement raisonnable peut s'obtenir à l'équilibre.

Preuve : Il faut montrer que $E \subset E_\infty$. Soit $u \in E$. $u$ est réalisable, donc il existe une partie $h = (s_1, ..., s_t, ...)$ telle que pour tout joueur $i$, $\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} g^i(s_t) \to_{T\to\infty} u^i$.

On appelle $h$ le plan principal de la stratégie, et jouer selon $h$ pour un joueur $i$ en date $t$ signifie jouer la $i$-ème composante de $s_t$. Pour chaque couple de joueurs distincts $(i, j)$, fixons $x^{i,j}$ dans $\Delta(S^j)$ tel que $(x^{i,j})_{j\neq i}$ réalise le min dans l'expression de $v^i$. Fixons maintenant un joueur $i$ dans $N$, et définissons une stratégie $\sigma^i$.

$\sigma^i$ joue en date 1 selon le plan principal, et continue de jouer selon $h$ tant que tous les autres joueurs le font. Si à une certaine date $t \geq 1$, pour la première fois un joueur $j$ ne joue pas selon le plan principal, alors $\sigma^i$ joue à toutes les dates ultérieures la probabilité $x^{j,i}$ (si pour la première fois à la même date plusieurs joueurs sortent du plan principal, on punit celui de ces joueurs qui est le plus petit, selon un ordre total sur $N$ préalablement fixé). Il est facile de voir que $\sigma = (\sigma^i)_{i \in N}$ est un équilibre de $G_\infty$ de paiement $u$. ∎

Certains des équilibres construits via le Folk théorème peuvent être critiqués car rien n'assure qu'un joueur $i$ aura intérêt, le cas échéant, à punir un joueur $j$ qui vient de quitter le plan principal pour la première fois. On peut alors s'intéresser à la notion suivante d'équilibre sous-jeux parfait (ESJP).
Etant donnés une histoire $h$ de $H$ et un profil de stratégies $\sigma$, on définit la stratégie de continuation $\sigma[h]$ comme le profil de stratégies $\tau = (\tau^i)_{i \in N}$, où : $\forall i \in N$, $\forall h' \in H$, $\tau^i(h') = \sigma^i(hh')$, où $hh'$ est l'histoire $h$ suivie de $h'$.
Un ESJP de $G_\infty$ est alors par définition un profil de stratégies $\sigma$ dans $\Sigma$ tel que pour toute histoire $h$ dans $H$, $\sigma[h]$ est un équilibre de $G_\infty$ ; et on note $E'_\infty$ l'ensemble des paiements de ces équilibres. On a : $E'_\infty \subset E_\infty = E$.
En 1976, Aumann et Shapley, ainsi que Rubinstein, ont démontré, avec de légères différences de formulation (voir les éditions de 1994), que ce raffinement d'équilibre ne changeait en fait absolument rien ici.

**Théorème 4.2** (Aumann et Shapley (1994), Rubinstein (1994)). **Folk théorème parfait**

$$E'_\infty = E_\infty = E.$$

Preuve :

La preuve se résume là aussi à construire un ESJP à partir d'un paiement réalisable et individuellement rationnel. Par rapport à la preuve du Folk théorème, il faut modifier la phase de punition. Si à une certaine date $t$, les joueurs jouaient selon le plan principal et le joueur $j$ en sort, les joueurs $-j$ se mettent à punir le joueur $j$ jusqu'à une certaine date $\bar{t}$, puis quoiqu'il arrive tout le monde oublie tout et revient, comme à l'étape 1, au début du chemin principal.

Une possibilité est de calculer, à la fin de l'étape $t$, le nombre $\bar{t}$ de manière à ce que le paiement moyen espéré du joueur $j$ jusqu'à la date $\bar{t}$, soit inférieur à à $v^j + 1/t$. Une autre possibilité est de prendre simplement $\bar{t} = 2t$. ∎

**4.2. Les Folk théorèmes escomptés.**

Passons maintenant aux paiements d'équilibres escomptés et reprenons l'exemple du dilemme du prisonnier avec un taux d'escompte $\lambda \in (0,1]$.

Determinons si $(3,3) \in E_\lambda$. Jouer $D^i$ pour la première fois peut augmenter à une étape le paiement du joueur $i$ de 1, pour perdre ensuite à chaque étape au moins 2. On aura donc un équilibre de paiement $(3,3)$ dans $G_\lambda$ si : $1 \leq 2 \ \sum_{t=1}^{\infty}(1-\lambda)^t = 2(1-\lambda)/\lambda$, soit si les joueurs sont suffisamment patients au sens où $\lambda \leq 2/3$.

En général, on a toujours $E_\lambda \subset E_\infty \doteq E$, et la question se pose de la convergence de $E_\lambda$ vers $E$. Cette convergence s'entend au sens de la distance de Hausdorff entre compacts de $\mathbb{R}^N$, donnée par $d(A,B) = \max\{\sup_{a\in A}\inf_{b\in B} d(a,b), \sup_{b\in B}\inf_{a\in A} d(a,b)\}$.

Le contre-exemple suivant à trois joueurs est dû à Forges, Mertens et Neyman (1986) :

$$\begin{pmatrix} (1,0,0) & (0,1,0) \\ (0,1,0) & (1,0,1) \end{pmatrix}.$$

Le joueur 1 choisit la ligne, le joueur 2 choisit la colonne et le joueur 3 n'a qu'une stratégie et donc ne choisit rien ici ! Ce jeu est essentiellement un jeu “à somme nulle” entre les joueurs 1 et 2, et dans tout équilibre de $G_\lambda$ chacun de ces joueurs choisit, indépendamment à chaque étape, ses deux actions avec probabilité 1/2. Donc $E_\lambda = \{(1/2, 1/2, 1/4)\}$, alors que $(1/2, 1/2, 1/2) \in E$, et on n'a pas en général la convergence de $E_\lambda$ vers $E$. On a toutefois le résultat suivant.

**Théorème 4.3.** *[Sorin, 1986]* **Folk théorème escompté**
*Supposons qu'il y ait 2 joueurs, ou qu'il existe $u = (u^i)_{i\in N}$ dans $E$ tel que pour tout $i$, $u^i > v^i$. Alors $E_\lambda \xrightarrow[\lambda\to 0]{} E$.*

On peut aussi définir les équilibres sous-jeux parfaits de $G_\lambda$ comme des stratégies en équilibre de Nash dans tout sous-jeu de $G_\lambda$. Notons $E'_\lambda$ l'ensemble (compact) des paiements de tels équilibres.

**Théorème 4.4** (Fudenberg Maskin, 1986, 1991). **Folk théorème parfait escompté**
*Si $E$ a un intérieur non vide, alors $E'_\lambda \xrightarrow[\lambda\to 0]{} E$.*

On ne démontre pas ici ces deux derniers théorèmes. Indiquons juste que les preuves utilisent des punitions “strictes”, et dans le cas sous-jeux parfait on utilise aussi des phases de récompense pour, le cas échéant, inciter les joueurs à punir. Un exemple où

on n'a pas la convergence de $E'_\lambda$ vers $E$ est le jeu à deux joueurs :

$$\begin{pmatrix} (1,0) & (1,1) \\ (0,0) & (0,0) \end{pmatrix}.$$

Dans tout équilibre sous-jeux parfait escompté, le joueur 1 doit choisir la ligne du haut à à chaque étape quoiqu'il se soit passé auparavant, et donc $E'_\lambda = \{(1,1)\}$ pour tout $\lambda$.

Donnons maintenant un exemple économique d'équilibre sous-jeux parfait escompté. Considérons un oligopole composé de $n$ firmes identiques, produisant un seul bien avec un coût de production marginal constant $c > 0$. Chacune des entreprises doit choisir son prix de vente, et les consommateurs achètent uniquement à l'entreprise meilleur marché (ou en cas d'égalité, à parts égales aux entreprises les moins chères). On note $D(p)$ le nombre de consommateurs prêts à acheter une unité du bien au prix $p$, et on suppose la demande toujours satisfaite. Chaque entreprise cherche à maximiser son profit, qui vaut $\pi(p) = D(p)(p - c)$ si l'entreprise propose seule le plus bas prix $p$, et qui vaut zéro si l'entreprise ne vend rien. Supposons que $\pi$ admette un maximum en un prix $\hat{p} > c$.

Si on joue le jeu une fois, le seul prix d'équilibre sera égal au coût marginal $c$, les profits étant nuls. Afin de tenir compte des possibilités dynamiques d'ajustement des prix, considérons le jeu répété avec un taux d'escompte $\lambda$. Examinons le profil de stratégies où tout le monde joue $\hat{p}$ jusqu'au cas éventuel où quelqu'un dévie, et alors à partir de ce moment chacun joue le prix $c$. Le paiement d'une entreprise si tout le monde joue selon ce profil est $\pi(\hat{p})/n$, et une entreprise qui dévie de cette stratégie en jouant $p$ à une certaine date, aura au plus à partir de là : $\lambda\pi(p) + (1 - \lambda)0 = \lambda\pi(p)$. Donc si les joueurs sont suffisamment patients au sens où $\lambda \leq 1/n$, on aura un ESJP où le prix observé est le prix de collusion (ou de monopole) $\hat{p}$.

### 4.3. Les Folk théorèmes finiment répétés.

Concluons cette partie avec les équilibres des jeux finiment répétés. Dans le dilemme du prisonnier, on montre par récurrence que pour tout $T$, $E_T$ se réduit à $\{(1,1)\}$. Donc le "bon" paiement $(3,3)$ ne peut être approché par des équilibres du jeu finiment répété, et on n'a pas la convergence de $E_T$ vers $E$.

Là encore, on définit les ESJP de $G_T$ comme des profils de stratégies $\sigma$ en équilibre de Nash dans tout sous-jeu : $\forall t \in \{0, ..., T-1\}, \forall h \in H_t$, $\sigma[h]$ est un équilibre de Nash du jeu restant, i.e. de $G_{T-t}$. On note $E'_T$ l'ensemble (compact) des paiements d'ESJP de $G_T$. Citons deux derniers Folk théorèmes, dont les preuves utilisent là encore judicieusement plan principal, phases de punitions et phases de récompense.

Les convergences sont au sens de Hausdorff.

**Théorème 4.5** (Benoît et Krishna, 1987). **Folk théorème finiment répété**
*Supposons que pour chaque joueur i il existe x dans $E_1$ tel que $x^i > v^i$.*
*Alors* $E_T \xrightarrow[T\to\infty]{} E$.

**Théorème 4.6** (Benoît et Krishna 1985, Gossner 1995). **Folk théorème parfait finiment répété**
*Supposons que pour chaque joueur i, il existe x et y dans $E_1$ tel que $x^i > y^i$ et que E est d'intérieur non vide. Alors* $E'_T \xrightarrow[T\to\infty]{} E$.

## 5. Extensions : exemples

On va dépasser ici le modèle standard de jeu répété non stochastique à information complète et à observation parfaite, en présentant quelques idées sur des exemples et sans développer les techniques.

### 5.1. Un exemple de jeu répété avec signaux.

Dans les jeux répétés avec signaux, les joueurs n'observent pas après chaque étape le profil d'actions venant d'être joué, mais reçoivent des signaux dépendant de ce profil.

Considérons un exemple où avec deux joueurs où les ensembles de signaux sont donnés par $U^1 = \{u, v, w\}$ et $U^2 = \{*\}$. Après chaque étape, le joueur 1 reçoit donc un signal dans $\{u, v, w\}$, alors que le joueur 2 reçoit le signal $*$. Celui-ci peut donc être considéré comme un joueur "aveugle", qui se rappelle juste des actions qu'il a lui-même jouées. Les paiements des joueurs dans le jeu de base et les signaux du joueur 1 sont donnés par :

$$\begin{array}{c} \\ H \\ B \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} G & \quad D \end{array} \\ \begin{pmatrix} (0,0), u & (4/5,1), v \\ (1/5,0), w & (1,0), w \end{pmatrix} \end{array}$$

$(4/5, 1)$ est un paiement réalisable et IR.. Cependant, on peut montrer qu'à l'équilibre les joueurs ne peuvent jouer un nombre significatif de fois la case $(H, D)$ : si c'était le cas, le joueur 1 pourrait dévier de façon profitable en jouant $B$ sans jamais craindre de punition de son adversaire.

Formellement, on prouve ici que $E_\infty = \operatorname{conv}\{(1/5, 0), (1, 0)\}$, et donc $E_\infty$ est strictement inclus dans l'ensemble des paiements réalisables et individuellement rationnels.

On ne sait pas en général caractériser $E_\infty$ dans les jeux répétés avec signaux, même pour deux joueurs. Parmi les nombreux articles sur le sujet, citons notamment

Lehrer (1989, 1992), ainsi que Renault et Tomala (1998, 2004) et Gossner et Tomala (2007).

### 5.2. Un exemple de jeu stochastique.

L'aspect jeu stochastique n'apparaît que lorsqu'il y a plusieurs jeux de base possibles, et donc plusieurs états. A chaque étape on joue celui des jeux de base qui correspond à l'état courant : les actions jouées déterminent alors les paiements mais aussi la probabilité de transition vers l'état suivant.

L'exemple suivant est un jeu à deux joueurs et somme nulle appelé “Big Match" et du à Blackwell et Ferguson (1968). Il est représenté par la matrice suivante.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 1* & 0* \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Les joueurs commencent à l'étape 1 par jouer la matrice ci-dessus. Ils continuent ainsi tant que le joueur 1 joue $B$ (et le joueur 1 observe après chaque étape l'action jouée par le joueur 2). Par contre, si un jour le joueur 1 joue $H$ alors le jeu s'arrête, et de deux choses l'une : soit le joueur 2 a joué $G$ ce jour-là, et alors le joueur 1 reçoit le paiement 1 à chaque étape ultérieure, sinon le joueur 2 a joué $D$ ce jour-là et alors le joueur 1 a un paiement nul à chaque étape ultérieure.

Formellement, il y a trois états ici : l'état de départ, l'état où le joueur 1 reçoit le paiement de 1 quoiqu'il arrive, et l'état où le joueur 1 a un paiement nul quoiqu'il arrive. Ces deux derniers états sont absorbants, c'est-à-dire que l'on y reste pour toujours à partir du moment où on y est entré (ils sont représentés par des $*$ dans la matrice de départ.)

Le joueur 2 peut jouer à chaque étape l'action mixte $1/2\ G + 1/2\ D$, et il est facile de montrer que le joueur 2 *garantit* ainsi le paiement 1/2. On a même

$$\exists \sigma^2,\ \forall T,\ \forall \sigma^1,\ \gamma_T^1(\sigma^1, \sigma^2) \leq 1/2.$$

Il est ici plus difficile et très intéressant d'imaginer des bonnes stratégies pour le joueur 1.

**Théorème 5.1** (Blackwell et Ferguson, 1968).
*Le Big Match a une valeur uniforme et cette valeur vaut 1/2, ce qui signifie :*
*le joueur 1 garantit 1/2, i.e.* $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \sigma^1,\ \exists T_0, \forall T \geq T_0,\ \ \forall \sigma^2,\ \gamma_T^1(\sigma^1, \sigma^2) \geq 1/2 - \varepsilon$,
*et le joueur 2 garantit 1/2, i.e.* $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \sigma^2,\ \exists T_0,\ \forall T \geq T_0,\ \forall \sigma^1,\ \gamma_T^1(\sigma^1, \sigma^2) \leq 1/2 + \varepsilon$.

Les jeux stochastiques ont été introduits par Shapley (1953). Mertens et Neyman (1981) ont montré en 1981 l'existence de la valeur uniforme dans tout jeu stochastique

(à information complète, sans signaux). Plus récemment, N. Vieille (2000a et 200b) a prouvé l'existence de paiements d'équilibres dans les jeux stochastiques à somme non nulle et 2 joueurs, la question restant ouverte pour un plus grand nombre de joueurs. Concernant les jeux stochastiques à somme non nulle, on peut notamment citer également Sorin (1986b), Solan (1999) et Solan et Vieille (2001). Pour des surveys, voir Mertens (2002), Vieille (2002).

**5.3. Des exemples de jeux répétés à information incomplète.**
Dans un jeu répété à information incomplète, il y a également plusieurs états possibles, et à chacun de ces états correspond un certain jeu de base. Un des états est tiré aléatoirement *une fois pour toutes* au début du jeu, et à chaque étape les joueurs vont jouer le même jeu de base correspondant à cet état. Les connaissances qu'ont les joueurs sur l'état sont typiquement imparfaites : chaque joueur reçoit au début du jeu un unique signal dépendant de l'état sélectionné, et peut donc avoir une connaissance partielle de l'état ainsi que des connaisances des autres sur l'état.

Plaçons-nous ici uniquement dans le cas de deux joueurs, somme nulle, et intéressons-nous à la notion de valeur uniforme, comme dans la sous-section précédente. On va supposer aussi qu'il y a *manque d'information d'un seul côté* : le joueur 1 a toute l'information, il observe parfaitement l'état sélectionné, alors que le joueur 2 n'est pas informé et ne reçoit initialement aucun signal. Supposons enfin qu'il n'y a que deux états, qui sont a priori équiprobables. On a donc le scénario suivant : initialement, un état $k \in \{a, b\}$ est tiré selon $p = (1/2, 1/2)$, et annoncé au joueur 1 seulement. Le joueur 2 sait que $k$ a été tiré selon $p$, mais ne sait rien d'autre sur $k$. Puis les joueurs répètent le jeu $G^k$ indéfiniment, en observant après chaque étape les actions choisies. Les matrices $G^a$ et $G^b$ sont parfaitement connues des deux joueurs.

On va voir sur des exemples que le jeu infiniment répété a une valeur uniforme (notée $v_\infty$), et que les joueurs ont des stratégies optimales, c'est-à-dire que le joueur 1 peut jouer une stratégie qui lui garantit $v_\infty$ :
$\exists \sigma^1, \forall \varepsilon > 0, \;\; \exists T_0, \forall T \geq T_0, \;\; \forall \sigma^2, \; \gamma_T^1(\sigma^1, \sigma^2) \geq v_\infty - \varepsilon,$
et que de même le joueur 2 peut jouer une stratégie qui lui garantit $v_\infty$ :
$\exists \sigma^2, \forall \varepsilon > 0, \;\; \exists T_0, \; \forall T \geq T_0, \; \forall \sigma^1, \; \gamma_T^1(\sigma^1, \sigma^2) \leq v_\infty + \varepsilon.$
Ceci est équivalent à l'existence d'un équilibre uniforme, et implique que la valeur $v_T$ du jeu en $T$ étapes converge vers $v_\infty$ lorsque $T$ tend vers $+\infty$.

**Exemple 1.** $G^a = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $G^b = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Facile. Le joueur 1 n'a qu'à jouer, à chaque étape, l'action $H$(haut) si l'état est

$a$ et l'action $B$(bas) si l'état est $b$. Ainsi la valeur uniforme existe et est nulle : $v_\infty = 0$.

**Exemple 2.** $G^a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $G^b = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Une stratégie "naïve" du joueur 1 est de jouer à l'étape 1 l'action $H$ si l'état est $a$, et l'action $B$ si l'état est $b$. Cette stratégie est dite *complètement révélatrice*, car en fonction de l'action jouée par le joueur 1 il est possible de déduire l'état sélectionné. Elle est optimale ici dans le jeu à une étape, et la valeur de ce jeu est $v_1 = 1/2$. Mais elle est très mauvaise quand le jeu est répété, et ne garantit rien de plus que 0 dans le jeu infini.

A l'inverse, le joueur 1 peut toujours ne pas tenir compte de son information, et jouer une stratégie *non révélatrice*, i.e. jouer indépendamment de l'état. Il considère alors la matrice moyenne $\frac{1}{2}G^a + \frac{1}{2}G^b = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$, et peut jouer à chaque étape la stratégie optimale de cette matrice. Puisque la valeur de cette matrice vaut $1/4$, on a : $v_T \geq \frac{1}{4}$ pour tout $T$.

Dans le jeu infini, on peut montrer qu'il est ici optimal pour le joueur 1 de jouer non révélateur. La valeur uniforme existe et vaut $1/4$.

**Exemple 3.** $G^a = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $G^b = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Jouer une stratégie complètement révélatrice ne garantit que 0 pour le joueur 1, car le joueur 2 pourra finalement jouer l'action $M$(ilieu) si l'état est $a$, et l'action $G$(auche) si l'état est $b$. Mais jouer une stratégie non révélatrice revient à se placer dans le jeu $\frac{1}{2}G^a + \frac{1}{2}G^b = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, et donc ne garantit que 0 également.

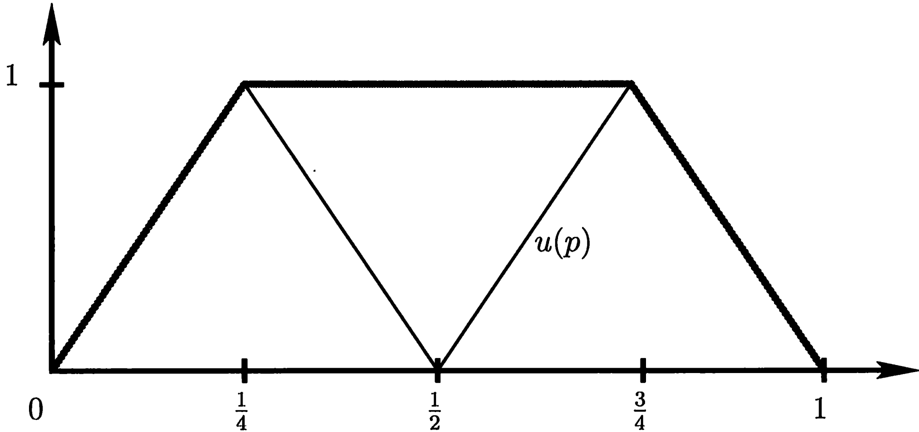
Dans le jeu infini, on montre qu'il est ici optimal pour le joueur 1 de jouer la stratégie $\sigma$ suivante.

Le joueur 1 choisit aléatoirement, une fois pour toutes, un élément $s$ dans $\{H, B\}$ de la façon suivante : si $k = a$, alors $s = H$ avec probabilité $3/4$, et donc $s = B$ avec probabilité $1/4$ ; et si $k = b$, alors $s = H$ avec probabilité $1/4$, et $s = B$ avec probabilité $3/4$. Ensuite le joueur 1 joue l'action $s$ à chaque étape, indépendamment des coups du joueur 2.

Les probabilités conditionnelles vérifient : $P(k = a|s = H) = 3/4$, et $P(k = a|s = B) = 1/4$. Donc à la fin de l'étape 1, le joueur 2 ayant observé le premier coup du joueur 1 aura appris quelque chose sur l'état de la nature : sa croyance sera passée de $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$ à $\frac{3}{4}a + \frac{1}{4}b$ ou à $\frac{1}{4}a + \frac{3}{4}b$. Mais il ne connaît toujours pas l'état avec probabilité

1 : on parle de *révélation partielle d'information.*

On peut prouver qu'ici $v_\infty = 1$ (voir la figure suivante).




($u$ est en noir et $\operatorname{cav} u$ en gris. La figure correspond à l'exemple 3 : $\operatorname{cav} u(1/2) = 1/2\, u(1/4) + 1/2\, u(3/4) = 1$.)

**Cas général.**

De façon générale, on a le résultat suivant dû à Aumann et Maschler (1966, voir la réédition de 1995) et valable pour un ensemble fini quelconque d'états $K$. Contentons-nous de l'énoncer ici.

**Théorème 5.2.**
*Dans un jeu répété à somme nulle et manque d'information d'un seul côté où la probabilité initiale est $p$, la valeur uniforme existe et vaut* $\operatorname{cav} u(p)$*, où :*
*$u$ est l'application de $\Delta(K)$ dans $I\!R$ donnée par $u(q) = \mathtt{val}(\sum_k q^k G^k)$ pour toute probabilité initale $q$, (valeur du jeu où pesonne n'est informé), et* $\operatorname{cav} u$ *est la plus petite fonction concave supérieure à $u$.*

Le résultat d'Aumann et Maschler a ouvert une vaste ligne de recherche, et on peut par exemple citer : pour les jeux à somme nulle, Mertens et Zamir (1971, 1977), Sorin et Zamir (1985), de Meyer (1996a et 1996b), Laraki (2001, 2002), Renault (2006, 2012), et pour les jeux à somme non nulle Sorin (1983), Hart (1985), Simon et al. (1995), Renault (2000). Pour des surveys, voir Forges (1992), Zamir (1992) et Sorin (2002).

CHAPITRE 9

# Exercices

## 1. Feuille n°1

**Exercice 1 : Mariages stables**

On considère un ensemble $H$ de $n$ hommes (notés $a, b, c$) et un ensemble $F$ de $n$ femmes (notées $A, B, C, ..$). Les hommes ont des préférences strictes sur l'ensemble des femmes et les femmes ont des préférences strictes sur l'ensemble des hommes. Par exemple avec $n = 3$, l'homme $b$ peut classser en premier la femme $C$, puis $A$ puis $B$, et la femme $C$ peut classer l'homme $a$ puis $c$ puis $b$.
Un mariage $\mu$ est un sous-ensemble de $H \times F$ de cardinal $n$ tel que tout homme est associé à exactement une femme, et toute femme à exactement un homme (donc une bijection de $H$ sur $F$).
Un mariage $\mu$ est **stable** s'il n'existe pas de couple alternatif $(x, Y)$ non marié suivant $\mu$ et tel que chacun préfère son partenaire dans le couple alternatif à celui qu'il a avec $\mu$.

Ce modèle a été introduit par Gale et Shapley (1962) qui ont montré l'existence d'un mariage stable grâce à l'algorithme suivant :
Les femmes restent chez elles et les hommes se déplacent (on obtient un autre algorithme en supposant que ce sont les femmes qui se déplacent).

Jour 1 : chaque homme propose la femme qu'il préfère; si une femme a plus d'une proposition, elle garde l'homme qu'elle préfère et rejette tous les autres. Si chaque femme a exactement une proposition l'algorithme s'arrête. Sinon :

Jour 2 : chaque homme rejeté le premier jour propose la femme suivante sur sa liste de préférences puis chaque femme compare les nouvelles propositions à l'ancienne qu'elle a déjà gardée (si elle en a) puis décide de conserver celle qu'elle préfère et rejette les autres. Si chaque femme a exactement une proposition l'algorithme s'arrête. Sinon, par induction :

Jour k : chaque homme rejeté le jour précédent propose la femme suivante sur sa liste. Chaque femme compare les nouvelles propositions à l'ancienne (si elle en a) puis décide de garder celle qu'elle préfère et rejette les autres. Si chaque femme a

exactement un homme l'algorithme s'arrête. Sinon on continue...

1) Montrer que l'algorithme est bien défini et qu'il s'arrête nécessairement en un nombre de jours inférieur à $n^2$.

2) Trouver tous les mariages stables des tableaux de préférences suivants :

| | $A$ | $B$ | $C$ |
|---|---|---|---|
| $a$ | (1,3) | (2,2) | (3,1) |
| $b$ | (3,1) | (1,3) | (2,2) |
| $c$ | (2,2) | (3,1) | (1,3) |

et

| | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ |
|---|---|---|---|---|
| $a$ | (1,3) | (2,3) | (3,2) | (4,3) |
| $b$ | (1,4) | (4,1) | (3,3) | (2,2) |
| $c$ | (2,2) | (1,4) | (3,4) | (4,1) |
| $d$ | (4,1) | (2,2) | (3,1) | (1,4) |

Le contenu de la case $(a, A)$ signifie que l'homme $a$ classe la femme $A$ en première position et que la femme $A$ classe l'homme $a$ en troisième position.

3) Montrer que le résultat de l'algorithme est toujours un mariage stable.

4) Montrer qu'il n'existe pas toujours de mariage stable dans une communauté : $2n$ étudiants ont chacun des préférences sur les $2n - 1$ autres et souhaitent cohabiter dans des chambres de deux personnes.

5) Définir un mariage stable et étudier son existence dans une société polygame : soient $n$ polytechniciens et $m$ écoles d'application ; chaque étudiant a des préférences sur les écoles et chaque école a une préférence sur les étudiants et un quota d'étudiants à ne pas dépasser.

### Exercice 2 : Procédure de partage

Un arbitre se propose de couper un gâteau (égal au carré $[0, 1] \times [0, 1]$) entre deux joueurs de la manière suivante. Il déplace son couteau de façon continue de gauche à droite (de 0 vers 1) sur l'axe des $x$. Le premier joueur qui arrête le jeu à $x \in [0, 1]$ gagne la part se trouvant à gauche de $x$ et l'autre gagne la part se trouvant à droite de $x$. Si les deux joueurs arrêtent en même temps c'est le joueur 1 qui gagne la part à gauche de $x$. La valeur totale du gâteau pour chaque joueur est égale à 1. La valeur de la part à gauche de $x$ pour le joueur 1 est $f(x)$ et sa valeur pour le joueur 2 est $g(x)$ où $f(\cdot)$ et $g(\cdot)$ sont deux fonctions continues et strictement croissantes dont le graphe va de (0,0) à (1,1).

1) Montrer que chaque joueur peut se garantir au moins 1/2.

2) Si vous êtes le joueur 1 (resp. 2) et que vous connaissez l'utilité de l'autre joueur, que faites vous ?

3) Si vous êtes le joueur 1 (resp. 2) et que vous ne connaissez pas l'utilité de l'autre joueur, que faites vous ? (il n'y a pas de réponse "juste").

4) L'arbitre change les règles du jeu et décide de parcourir l'axe des $x$ de droite à gauche. Les joueurs sont-ils indifférents à ce changement ?

**Exercice 3 : Bus ou voiture ?**

Soit une population d'une ville avec un très grand nombre d'individus que l'on représente par l'intervalle $[0,1]$. Les individus ont le choix entre le bus et la voiture et ont les mêmes préférences : $u(B,x)$ (resp. $u(V,x)$) est l'utilité d'un usager qui prend le bus (resp. la voiture) dans un environnement où $x$ est la proportion des personnes qui prennent le bus. Il est naturel de supposer que l'utilité de prendre la voiture $u(V,x)$ est continue et strictement croissante avec $x$ (plus $x$ est grand, moins il y a de traffic et plus il y a de places de stationnement). $u(B,x)$ peut être une fonction continue quelconque.

On part d'une distribution initiale $x_0 \in ]0,1[$ et on suppose que $x_t$, la distribution de la société à l'instant $t \in [0,+\infty[$, évolue suivant la dynamique du réplicateur :

$$\dot{x}_t = [u(B,x_t) - v(x_t)]x_t.$$

avec $v(x_t) = x_t u(B,x_t) + (1-x_t)u(V,x_t)$.
Etudions les points stationnaires de cette dynamique en fonction des préférences.

1) Que se passe-t-il si $u(V,x) > u(B,x)$ $\forall x$ ?

2) Construire un exemple numérique où l' "utilité sociale", $v(x_t)$, diminue strictement avec le temps.

3) Que se passe-t-il si $u(V,x) = 2 + 3x$ et $u(B,x) = 3$ ?

4) Supposer que $u(B,0) > U(V,0)$ et que $u(B,1) < U(V,1)$. Montrer que génériquement, le nombre de points stationnaires de la dynamique (limites de trajectoires partant dans $]0,1[$) est impair (égal à $2m+1$), et que parmi eux $m+1$ sont des attracteurs locaux.

5) Faire de même dans les autres cas de figures (toujours dans un cadre générique).

**Exercice 4 : Enchère à la Vickrey**

Un tableau est vendu aux enchères suivant la procédure suivante :
a) chaque joueur $j$ soumet sous enveloppe une offre $p_j$ ;
b) le joueur $k$ qui soumet la plus grande offre ($p_k = \max_j p_j$) gagne l'objet ;
c) s'il y a plusieurs joueurs $k$, le gagnant est sélectionné entre eux au hasard suivant une distribution uniforme ;
d) le gagnant paie pour le tableau le second meilleur prix $p$ offert (soit $p = \max_{j \neq k} p_j$).

Supposons que chaque joueur $i$ possède une utilité égale à 0 s'il ne gagne pas l'objet et égale à $v_i - p$ s'il gagne l'objet et l'achète au prix $p$ (où $v_i$ est interprété comme étant le prix maximal auquel le joueur $i$ est prêt à acheter l'objet).

Montrer que proposer $p_i = v_i$ est une stratégie dominante pour chaque $i$.

## 2. Feuille n°2

**Exercice 1. Théorème de Loomis** (1946)

Soient $A$ et $B$ deux matrices $I \times J$, avec $B \gg 0$ (tous les coefficients de $B$ sont strictement positifs). On va montrer qu'il existe un unique $v \in \mathbb{R}$, et des éléments $s \in \Delta(I)$, $t \in \Delta(J)$ tels que :

$$sA \geq v\, sB, \quad \text{et } At \leq v\, Bt.$$

On n'utilisera pas ici le théorème de Von Neumann. La preuve est par récurrence sur $|I| + |J|$.

1) Soient $A$ et $B$ dans $\mathbb{R}^{I\times J}$, où $|I| + |J| \geq 3$. On définit $\lambda_0 = \sup\{\lambda \in \mathbb{R}, \exists s \in \Delta(I), sA \geq \lambda\, sB\}$, et $\mu_0 = \inf\{\mu \in \mathbb{R}, \exists t \in \Delta(J), At \leq \mu\, Bt\}$.

1.1) Montrer que le sup et l'inf sont atteints, et que $\lambda_0 \leq \mu_0$. Si $\lambda_0 = \mu_0$, le résultat est démontré, on suppose donc dans la suite $\lambda_0 < \mu_0$. Soient $s_0$ et $t_0$ tels que $s_0 A \geq \lambda_0\, s_0 B$, et $At_0 \leq \mu_0\, Bt_0$.

1.2) Montrer qu'on ne peut avoir $s_0 A - \lambda_0\, s_0 B = 0$ et $At_0 - \mu_0 Bt_0 = 0$.

1.3) On suppose ici qu'il existe $J' \neq J$ tel que : $\forall j \in J$, $(s_0 A_j - \lambda_0\, s_0 B_j = 0 \text{ ssi } j \in J')$. En utilisant l'hypothèse de récurrence, on définit $v' \in IR$ et $s' \in \Delta(I)$ associés aux sous-matrices $I \times J'$ de $A$ et de $B$. Montrer que $v' \geq \mu_0 > \lambda_0$, et obtenir une contradiction dans la définition de $\lambda_0$.

1.4) Conclure.

2) Déduire le théorème du minmax de Von Neumann du théorème de Loomis.

3) Soit $B$ une matrice carrée $> 0$. Montrer qu'il existe un vecteur propre de $B$ associé à une valeur propre strictement positive et qui a toutes ses coordonnées strictement positives. (Perron-Frobenius).

**Exercice 2. Minmax à 3 joueurs**

On considère le jeu à 3 joueurs où le joueur 1 choisit une probabilité $x \in \Delta(\{H, B\})$, le joueur 2 choisit $y \in \Delta(\{G, D\})$ et le joueur 3 choisit $z \in \Delta(\{O, E\})$. Les probabilités employées par les joueurs sont indépendantes, et le paiement du joueur 3 est donné par l'espérance de la fonction $g$ suivante :

| | $G$ | $D$ |
|---|---|---|
| $H$ | 1 | 0 |
| $B$ | 0 | 0 |

$O$

| | $G$ | $D$ |
|---|---|---|
| $H$ | 0 | 0 |
| $B$ | 0 | 1 |

$E$

Comparer

$$\max_{(x,y)} \min_{z} g(x,y,z) \quad \text{et} \quad \min_{z} \max_{(x,y)} g(x,y,z).$$

**Exercice 3. Théorème de Ville** (1938)

Soient $X = Y = [0,1]$ munis de leur tribu Borélienne, et $f$ une application continue de $X \times Y$ dans $\mathbb{R}$. On considère le jeu à somme nulle $G$ où le joueur 1 choisit $\sigma$ dans $\Delta(X)$, le joueur 2 choisit $\tau$ dans $\Delta(Y)$, et le paiement du joueur 1 est :

$$f(\sigma,\tau) = \int_{X \times Y} f(x,y)\, d\sigma(x)\, d\tau(y).$$

Pour chaque $n \geq 1$, on définit le jeu matriciel $G_n$ où : le joueur 1 choisit une action dans $X_n = \{\frac{i}{2^n}, i \in \{0,...,2^n\}\}$, le joueur 2 choisit une action dans $Y_n = X_n$, le paiement du joueur 1 étant donné par $G_n(i,j) = f(\frac{i}{2^n}, \frac{j}{2^n})$. On note $v_n$ la valeur (en stratégies mixtes) de $G_n$.

1) Montrer que dans $G$ le joueur 1 garantit $\limsup_n v_n$ (à $\varepsilon$ près pour tout $\varepsilon > 0$). En déduire que $G$ a une valeur.

2) Montrer que dans $G$ chaque joueur a une stratégie optimale. (On pourra plonger les stratégies optimales de $\{G_n\}$ dans $\Delta([0,1])$ et en extraire une sous suite faiblement convergente).

**Exercice 4. Approchabilité déterministe et théorème de minmax**

Soient $C$ un convexe fermé de $\mathbf{R}^K$ (muni de la norme Euclidienne) et $\{x_n\}$ une suite bornée de $\mathbf{R}^K$.

Pour tout $x$ dans $\mathbf{R}^K$, $\Pi_C(x)$ dénote la projection de $x$ sur $C$ et $\bar{x}_n$ dénote la moyenne de Césaro à l'étape $n$ de la suite $\{x_n\}$ :

$$\bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

1) Approchabilité de Blackwell en déterministe (Blackwell, 1956) :
Montrer que si $\{x_n\}$ est une $C$-suite de Blackwell, i.e. satisfait

$$\langle x_{n+1} - \Pi_C(\bar{x}_n), \bar{x}_n - \Pi_C(\bar{x}_n) \rangle \leq 0, \quad \forall n$$

alors $d_n = d(\bar{x}_n, C)$ converge vers 0.

2) Conséquence : le théorème du minmax.
Soit $A$ une matrice $I \times J$ représentant les paiements d'un jeu à deux joueurs à somme nulle. Supposons que le joueur 2 ne peut pas garantir moins que 0 :

$$\bar{v} = \min_{t \in \Delta(I)} \max_{i \in I} iAt = 0$$

et montrons que le joueur 1 peut alors garantir 0, i. e. $\underline{v} \geq 0$.

Pour cela définissons une suite $x_n \in \mathbf{R}^J$ par récurrence. Le premier terme $x_1$ est une ligne quelconque de la matrice $A$. Etant donnés $x_1, x_2, ..., x_n$ nous définissons $x_{n+1}$ comme suit :
Soit $\bar{x}_n^+$ le vecteur dont la $j$-ème coordonnée est $\max(\bar{x}_n^j, 0)$. Si $\bar{x}_n = \bar{x}_n^+$ alors $x_{n+1}$ est une ligne quelconque de la matrice. Sinon, soit $a > 0$ tel que

$$t_{n+1} = \frac{\bar{x}_n^+ - \bar{x}_n}{a} \in \Delta(J).$$

Puisque $\bar{v} = 0$, il existe $i_{n+1} \in I$ tel que $i_{n+1}At_{n+1} \geq 0$. $x_{n+1}$ est alors la ligne $i_{n+1}$ de la matrice $A$.

2.1) Montrer que $\{x_n\}$ est $C$-une suite de Blackwell avec $C = \{x \in \mathbf{R}^J;\ \ x \geq 0\}$.

2.2) Conclure qu'il existe $s \in \Delta(I)$ satisfaisant $sAt \geq 0$, pour tout $t \in \Delta(J)$.

**Exercice 5. Calcul de valeurs**

Calculer la valeur et les stratégies optimales des jeux à somme nulle suivants (où $x \in \mathbb{R}$) :

| | $b_1$ | $b_2$ |
|---|---|---|
| $a_1$ | 1 | 2 |
| $a_2$ | 0 | $x$ |

| | $b_1$ | $b_2$ |
|---|---|---|
| $a_1$ | 3 | −1 |
| $a_2$ | 0 | 0 |
| $a_3$ | −2 | 1 |

**Exercice 6. Un jeu diagonal**

Calculer la valeur et les stratégies optimales de la matrice diagonale $n \times n$ avec $a_i > 0$ pour tout $i$ :

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & & 0 \\ 0 & a_2 & ... & 0 \\ ... & ... & & ... \\ 0 & 0 & ... & a_n \end{pmatrix}$$

## 3. Feuille n°3

### Exercice 1 : Duels

On suit Dresher (1961).

Deux joueurs à une distance initiale $D_0$, avancent l'un vers l'autre avec chacun un pistolet chargé d'une ou plusieurs balles. La distance entre les deux à l'instant $t \in [0, 1]$, $D_t$, diminue strictement avec le temps jusqu'à atteindre 0 quand $t = 1$.

On supposera que le gain d'un joueur est égal à $+1$ s'il est le seul survivant, $-1$ s'il meurt seul et 0 sinon. On supposera aussi que la probabilité que le joueur $i = 1, 2$ tue son adversaire en tirant une balle à l'instant $t$ est $p_i(t)$ où $p_i(t)$ est une fonction continue et strictement croissante avec $p_i(0) = 0$ et $p_i(1) = 1$.

Ces deux fonctions sont connues des deux joueurs. La fonction de paiement de ce jeu à somme-nulle est l'espérance du gain du joueur 1 (qui maximise).

1) Les joueurs disposent chacun d'un pistolet bruyant et d'une seule balle. Ainsi, si l'un des deux a tiré, l'autre l'a entendu. Après le premier tir, le comportement optimal du survivant est donc d'avancer jusqu'à une distance nulle et de tuer l'adversaire.

Une stratégie pure du joueur 1 (resp. 2) est l'instant $x \in [0, 1]$ (resp. $y$) où il va tirer s'il est encore en vie et si l'autre n'a pas encore tiré.

Montrer que le jeu a une valeur en stratégies pures et que la stratégie optimale du joueur $i$ est de tirer à l'instant $t_0$ où $p_i(t_0) + p_j(t_0) = 1$.

2) Les joueurs disposent de plusieurs balles ($m$ pour le joueur 1 et $n$ pour le joueur 2) et de pistolets bruyants. On supposera que $p_1(t) = p_2(t) = t$.

Montrer par récurrence sur $m + n$ que la valeur du jeu est $\frac{m-n}{m+n}$ et qu'il est optimal pour le joueur qui a un nombre de balles égale au $\max(m, n)$ de tirer pour la première fois à $t_0 = \frac{1}{m+n}$.

3) Les joueurs disposent d'une balle chacun et de pistolets silencieux (de sorte qu'aucun des deux ne sait si l'adversaire a déjà tiré ou pas). On supposera $p_1(t) = p_2(t) = t$.

Maintenant une stratégie pure du joueur 1 (resp. 2) est le moment où il va tirer s'il est encore en vie et sera encore noté $x \in [0, 1]$ (resp. $y$).

3.1) Montrer que le jeu n'a pas de valeur en stratégies pures.

3.2) Le joueur 1 décide de tirer suivant une stratégie mixte de support $[\alpha, 1]$ et une densité $f(x)dx$. Montrer qu'il existe une fonction $f$ différentiable et $\alpha > 0$ qui lui

garantissent un paiement positif ou nul. Conclure.

4) Le joueur 1 a un pistolet silencieux et une balle, l'autre un pistolet bruyant et une balle aussi. On suppose $p_1(t) = p_2(t) = t$. On veut montrer que le jeu a une valeur en stratégies mixtes $v = 1 - 2a$ avec $a = \sqrt{2} - 1$.
4.1) Montrer que la stratégie mixte de densité :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad 0 \leq x < a \\ \dfrac{\sqrt{2}a}{(x^2 + 2x - 1)^{3/2}} & si \quad a \leq x \leq 1 \end{cases}$$

assure $1 - 2a$ au joueur 1.
4.2) Montrer que le joueur 2 s'assure le même paiement en mixant suivant la fonction de répartition suivante :

$$G(y) = \frac{2}{2+a} \int_0^y f(x)dx + \frac{a}{2+a} I_1(y),$$

où $I_1(y)$ est la fonction de répartition associé à la masse de Dirac au point 1. Ainsi, le joueur 2 utilise la même stratégie que le joueur 1 avec probabilité $\frac{2}{2+a}$ et décide de tirer à l'instant 1 avec probabilité $\frac{a}{2+a}$.

5) Peux t-on raisonner par récurrence dans le cas d'un duel silencieux avec plusieurs balles.

**Exercice 2 : Un contre-exemple** (Sion, 1958)

Soit $S = T = [0, 1]$ et $f$ l'application de $S \times T \to \{0, -1\}$ définie comme suit :

$$f(s,t) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad t = 0 \quad s < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{si} \quad t = 1 \quad s \geq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que le jeu n'a pas de valeur en stratégies pures et que les conditions de Sion sont satisfaites partout sauf en $t = 1$.
Ce jeu admet-il une valeur en stratégies mixtes ?

**Exercice 3 : Famille monotone**

On considère une famille de jeux à somme nulle $G_n = (S, T, f_n)$ telle que :
- $(f_n)$ est une suite décroissante de fonctions uniformément bornées, s.c.s en $s$ pour chaque $t$,
- pour tout $n$, $G_n$ a une valeur $v_n$,
- $S$ est compact.

1) On pose $f = \inf_n f_n$. Montrer que $G = (S, T, f)$ a une valeur $v = inf_n v_n$, et que dans $G$ le joueur 1 a une stratégie optimale.

2) Comparer la valeur $v$ de $G$ et $\lim v_n$ dans les deux cas suivants d'un jeu à à un seul joueur :

$(i)$ $S = [0, +\infty[$, $f_n(s) = \mathbf{1}_{\{s \geq n\}}$

$(ii)$ $S = [0, 1]$, $f_n$ est continue et linéaire par morceaux (trois morceaux) : $f_n(0) = f_n(\frac{2}{n}) = f_n(1) = 0$ et $f_n(\frac{1}{n}) = 1$.

**Exercice 4 : Inégalités dans les jeux à somme nulle**

Soit $(A, B, g)$ un jeu à somme nulle où $A$ est l'ensemble des stratégies pures du joueur 1 et $B$ est l'ensemble des stratégies pures du joueurs 2 et $g : A \times B \to \mathbf{R}$ est la fonction de paiement (du joueur 1). Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des fonctions de réaction $\alpha : B \to A$ du joueur 1 et $\mathcal{B}$ l'ensemble des fonctions de réaction $\beta : A \to B$ du joueur 2. Rappelons que $\underline{v} = \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} g(a, b)$ et que $\overline{v} = \inf_{b \in B} \sup_{a \in A} g(a, b)$.

1) Montrer que $\underline{v} = \inf_{\beta \in \mathcal{B}} \sup_{a \in A} g(a, \beta(a))$ et que $\overline{v} = \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} \inf_{b \in B} g(\alpha(b), b)$.

Supposons désormais que $A$ et $B$ sont des convexes compacts de $\mathbf{R}^k$. Soient $\mathcal{A}_c$ le sous-ensemble des fonctions $\alpha$ dans $\mathcal{A}$ qui sont continues et $\mathcal{B}_c$ le sous-ensemble des fonctions $\beta \in \mathcal{B}$ qui sont continues.

2) Montrer que $\underline{v} \leq \sup_{\alpha \in \mathcal{A}_c} \inf_{b \in B} g(\alpha(b), b)$ et que $\inf_{\beta \in \mathcal{B}_c} \sup_{a \in A} g(a, \beta(a)) \leq \overline{v}$.

3) Montrer que pour tout $\alpha \in \mathcal{A}_c$ et $\beta \in \mathcal{B}_c$ il existe $(a, b) \in A \times B$ tel que $\alpha(b) = a$ et que $\beta(a) = b$.

4) En déduire que

$$\sup_{\alpha \in \mathcal{A}_c} \inf_{b \in B} g(\alpha(b), b) \leq \inf_{\beta \in \mathcal{B}_c} \sup_{a \in A} g(a, \beta(a))$$

5) Calculer $\underline{v}$, $\overline{v}$, $\sup_{\alpha \in \mathcal{A}_c} \inf_{b \in B} g(\alpha(b), b)$ et $\inf_{\beta \in \mathcal{B}_c} \sup_{a \in A} g(a, \beta(a))$ quand $A = B = [0, 1]$ et $g(a, b) = |a - b|$.

## 4. Feuille n°4

**Exercice 1 : Approchabilité de Blackwell**

Soit $A$ une matrice $I \times J$ à valeurs dans $\mathbf{R}^k$. $A_{i,j} \in \mathbf{R}^k$ est le résultat (vectoriel) si le joueur 1 joue $i$ et le joueur 2 joue $j$. Pour $x \in \Delta(I)$, $xA$ dénote l'ensemble dans $\mathbf{R}^k$ des résultats compatibles en espérance quand le joueur 1 joue $x$ :

$$\begin{aligned} xA &= \{g \in \mathbf{R}^k : \exists y \in \Delta(J) \quad \text{tel que} \quad g = xAy\} \\ &= \{\textstyle\sum_{i\in I, j\in J} x_i A_{i,j} y_j, y \in \Delta(J)\} = \text{conv}\ \{\textstyle\sum_{i\in I} x_i A_{i,j}, j \in J\}. \end{aligned}$$

Soit $C$ un convexe fermé non vide de $\mathbf{R}^k$ (muni de la norme Euclidienne). Pour tout $z$ dans $\mathbf{R}^k$, $\Pi_C(z)$ dénote le point de $C$ le plus proche de $z$, i.e. la projection de $z$ sur $C$.

On suppose que l'ensemble $C$ est un $\mathbf{B}$-ensemble pour le joueur 1, i.e. satisfait :

$$\forall z \notin C, \exists x \in \Delta(I) \quad \text{tel que} \quad \forall g \in xA : \quad \langle g - \Pi_C(z), z - \Pi_C(z)\rangle \leq 0.$$

Cela signifie que l'hyperplan affine passant par $\Pi_C(z)$ et orthogonal à $[z, \Pi_C(z)]$ sépare $z$ de $xA$.

Le jeu se joue en temps discret durant un nombre infini d'étapes. Nous le définissons inductivement. A chaque étape $n$, $n = 1, 2, ...$, après avoir observé l'histoire $h_{n-1}$ des actions choisies dans le passé jusqu'à l'étape $n-1$, soit $h_{n-1} = (i_1, j_1, ....., i_{n-1}, j_{n-1}) \in \mathcal{H}_{n-1}$, avec $\mathcal{H}_n = (I \times J)^n$ et $\mathcal{H}_0 = \{\emptyset\}$, le joueur 1 choisit $x_n(h_{n-1}) \in \Delta(I)$ et le joueur 2 choisit $y_n(h_{n-1}) \in \Delta(J)$. Un couple $(i_n, j_n) \in I \times J$ est alors tiré selon la distribution de probabilité produit $x_n(h_{n-1}) \otimes y_n(h_{n-1})$. On passe à l'étape $n+1$ avec l'histoire $h_n = (i_1, j_1, ....., i_n, j_n) \in \mathcal{H}_n$. Ainsi, une stratégie $\sigma$ du joueur dans le jeu répété est de la forme $\sigma = (x_1, ..., x_n, ...)$ où $x_n : \mathcal{H}_{n-1} \to \Delta(I)$. Une stratégie $\tau$ du joueur 2 est de la forme $\tau = (y_1, ..., y_n, ...)$ où $y_n : \mathcal{H}_{n-1} \to \Delta(J)$. Un couple $(\sigma, \tau)$ définit une distribution de probabilité $\mathbf{P}_{\sigma,\tau}$ sur l'ensemble des parties $\mathcal{H}_\infty = (I \times J)^{\mathbf{N}^*}$, muni de la tribu cylindrique, et on note $\mathbf{E}_{\sigma,\tau}$ l'espérance associée. Chaque partie du jeu $(i_1, j_1, ..., i_n, j_n, ...)$ génère une suite de paiements vectoriels $(g_1 = A_{i_1,j_1}, ..., g_n = A_{i_n,j_n}, ...)$ dans $\mathbf{R}^k$. Soit $\bar{g}_n$ sa moyenne de Cesàro à l'étape $n$ :

$$\bar{g}_n = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} A_{i_t,j_t} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} g_t.$$

Blackwell a montré qu'il existe une stratégie $\sigma$ du joueur 1 telle que $\bar{g}_n$ s'approche de l'ensemble $C$ et ce quelque soit la stratégie $\tau$ du joueur 2 : $d_n = \|\bar{g}_n - \Pi_C(\bar{g}_n)\| \to 0$, $\mathbf{P}_{\sigma,\tau}$-presque sûrement. La stratégie de Blackwell $\sigma$ est définie inductivement comme

suit. A l'étape $n+1$, si $\bar{g}_n \in C$ le joueur 1 joue $x_{n+1} \in \Delta(I)$ quelconque, sinon il joue $x_{n+1} \in \Delta(I)$ telle que pour tout $y \in \Delta(J)$ :

$$\langle x_{n+1}Ay - \Pi_C(\bar{g}_n), \bar{g}_n - \Pi_C(\bar{g}_n)\rangle \leq 0.$$

(On utilise ici le fait que $C$ est un **B**-ensemble.) Dans la suite, le joueur 1 utilise la stratégie $\sigma$ de Blackwell, et $\tau$ est une stratégie quelconque du joueur 2.

1) Montrer que, pour tout $n \geq 1$ et $h_n$ dans $\mathcal{H}_n$ :

$$\mathbf{E}_{\sigma,\tau}\left[d_{n+1}^2 \,|h_n\right] \leq \frac{1}{(n+1)^2}\mathbf{E}_{\sigma,\tau}\left[\|g_{n+1} - \Pi_C(\bar{g}_n)\|^2 \,|h_n\right] + \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 d_n^2.$$

2) Montrer que $\mathbf{E}_{\sigma,\tau}\left[\|g_{n+1} - \Pi_C(\bar{g}_n)\|^2 \,|h_n\right] \leq 4\,\|A\|_\infty^2$ avec $\|A\|_\infty = \max_{i,j,k}\left\|A_{i,j}^k\right\|$.
3) En déduire que

$$\mathbf{E}_{\sigma,\tau}\left[d_n\right] \leq \frac{2\,\|A\|_\infty}{\sqrt{n}}.$$

En particulier, la convergence est uniforme en $\tau$.
4) Soit $e_n = d_n^2 + \sum_{t=n+1}^{\infty} \frac{4\|A\|_\infty^2}{t^2}$. Montrer que $\{e_n\}$ est une surmartingale positive dont l'espérance tend vers zéro. En déduire que $\mathbf{P}_{\sigma,\tau}\left[d_n \to 0\right] = 1$.

**Exercice 2.**

Soit $S = T = [0,1]$. On considère le jeu $G = (S,T,f)$, où :

$$f(s,t) = \begin{cases} 0 & si \quad s = t \\ -\frac{1}{s^2} & si \quad s > t \\ \frac{1}{t^2} & si \quad s < t \end{cases}$$

1) Montrer que pour tout $t$ dans $T$, $\int_s f(s,t)\,ds = 1$.

2) En déduire que : $\sup_{\sigma\in\Delta(S)}\inf_{t\in T} f(\sigma,t) > \inf_{\tau\in\Delta(T)}\sup_{s\in S} f(s,\tau)$, où $f(\sigma,t) = \int_s f(s,t)\,d\sigma(s)$ et $f(s,\tau) = \int_t f(s,t)\,d\tau(t)$.

3) On rappelle que l'on a toujours $\sup_\sigma \inf_\tau f \leq \inf_\tau \sup_\sigma f$. Que penser de l'extension mixte de $G$ ?

**Exercice 3. Sion et Wolfe** (1957)

Soient $S = T = [0,1]$ munis de leur tribu Borélienne, et $f$ définie sur $S \times T$ par :

$$f(s,t) = \begin{cases} -1 & \text{si } s < t < s + 1/2, \\ 0 & \text{si } t = s \text{ ou } t = s + 1/2, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On considère l'extension mixte $G$ où le joueur 1 choisit $\sigma$ dans $\Delta(S)$, le joueur 2 choisit $\tau$ dans $\Delta(T)$, et le paiement du joueur 1 est

$$f(\sigma,\tau) = \int_{s,t} f(s,t)\, d\sigma(s)\, d\tau(t).$$

Montrer que $\sup_{\sigma \in \Delta(S)} \inf_{t \in T} f(\sigma, t) = 1/3$.
En déduire que $G$ n'a pas de valeur.

## 5. Feuille n°5

**Exercice 1.**

1) Calculer les équilibres de Nash en stratégies mixtes des jeux suivants : à deux joueurs :

$$\begin{array}{c} \\ H \\ B \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} (6,6) & (2,7) \\ (7,2) & (0,0) \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \\ H \\ B \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} (2,-2) & (-1,1) \\ (-3,3) & (4,-4) \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \\ H \\ B \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} (1,0) & (2,1) \\ (1,1) & (0,0) \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \\ H \\ M \\ B \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} g & m & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} (1,1) & (0,0) & (8,0) \\ (0,0) & (4,4) & (0,0) \\ (0,8) & (0,0) & (6,6) \end{pmatrix} \end{array}$$

à trois joueurs :

$$\begin{array}{c} \\ H \\ B \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} (1,1,-1) & (0,0,0) \\ (0,0,0) & (0,0,0) \end{pmatrix} \\ O \end{array} \qquad \begin{array}{c} \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} (0,0,0) & (0,0,0) \\ (0,0,0) & (1,1,-1) \end{pmatrix} \\ E \end{array}$$

2) Calculer les valeurs des jeux à somme nulle représentés par les matrices suivantes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \\ -2 & 4 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 2.**

Un groupe de $n$ pêcheurs exploite un lac. Si chaque pêcheur $i$ prend une quantité $x_i \geq 0$, le prix unitaire du poisson s'établit à $p = \max(1 - \sum_{i=1}^{n} x_i, 0)$. Chaque pêcheur vend toute sa production au prix $p$ et cherche à maximiser son revenu (le coût

de production est supposé nul).

1) Ecrire le jeu sous forme stratégique associé.

2) Calculer les équilibres de Nash et le revenu total à chaque équilibre.

3) Etudier le cas du monopole ($n = 1$) et comparer.

**Exercice 3. Paiements réalisables**

On note $j$ le nombre complexe $e^{\frac{2i\pi}{3}}$, et $g$ l'application de $\mathbb{C}^3$ dans $\mathbb{C}$ définie par $g(a, b, c) = a\,b\,c$. Soit le jeu $G$ à 3 joueurs, où $A^1 = \{1, j\}$, $A^2 = \{j, j^2\}$, et $A^3 = \{j^2, 1\}$. Pour $(a, b, c)$ dans $A^1 \times A^2 \times A^3$, le paiement du joueur 1 est la partie réelle de $g(a, b, c)$, celui du joueur 2 la partie imaginaire de $g(a, b, c)$, et le paiement du joueur 3 est nul.

1) Déterminer l'extension mixte de $G$.

2) L'ensemble des paiements réalisables en stratégies mixtes est-il convexe ? contractible ?

**Exercice 4.**

A) *Théorème de Tarski*

On se place dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, muni de l'ordre partiel produit : $x \geq y$ ssi $x_i \geq y_i$ pour tout $i$. Un sous-ensemble $S$ de $\mathbb{R}^n$ est un sous-treillis de $\mathbb{R}^n$ si pour tous $x$ et $y$ dans $S$, on a : $\sup\{x, y\} \in S$ et $\inf\{x, y\} \in S$. On considère un sous-treillis compact non vide $S$ de $\mathbb{R}^n$.

A.1) Montrer que pour tout sous-ensemble non vide $A$ de $S$, on a $\sup A \in S$ et $\inf A \in S$ (considérer par exemple une partie dénombrable dense de $\bar{A}$). En déduire que $S$ a un plus grand et un plus petit élément.

A.2) Soit $f$ une application croissante de $S$ dans $S$. Montrer qu'elle a un point fixe.

B) *Jeux supermodulaires*

On considère un jeu stratégique $G$ où pour tout joueur $i \in N$ l'ensemble de stratégies $S^i$ est compact non vide de $\mathbb{R}^{m_i}$, et la fonction de paiement $g^i$ est s.c.s en $s^i$ à $s^{-i}$ fixée. On suppose de plus le jeu $G$ supermodulaire, c'est-à-dire :

($i$) Pour tout $i$, $S^i$ est un sous-treillis de $\mathbb{R}^{m_i}$ .

($ii$) $g^i$ a des différences croissantes en $(s^i, s^{-i})$ : $g^i(s^i, s^{-i}) - g^i(s'^i, s^{-i}) \geq g^i(s^i, s'^{-i}) - g^i(s'^i, s'^{-i})$ si $s^i \geq s'^i$ et $s^{-i} \geq s'^{-i}$.

($iii$) $g^i$ est supermodulaire en $s^i$ : $\forall s^{-i} \in S^{-i}$, $\quad g^i(s^i, s^{-i}) + g^i(s'^i, s^{-i}) \leq g^i(s^i \vee s'^i, s^{-i}) + g^i(s^i \wedge s'^i, s^{-i})$.

B.1) Montrer que pour tout $i$ et $s^{-i}$, $BR^i(s^{-i})$ est un sous-treillis compact non vide de $\mathbb{R}^{m_i}$.
B.2) On suppose $s^{-i} \geq s'^{-i}$. Montrer que $\forall t'^i \in BR^i(s'^{-i})$, $\exists t^i \in BR^i(s^{-i})$ t.q. $t^i \geq t'^i$.
B.3) Montrer que $G$ possède un équilibre de Nash.

C) *Exemple : duopole de Cournot*
Soient deux entreprises 1 et 2 : chaque entreprise $i$ choisit $q_i$ dans $[0, Q_i]$ et a comme paiement $g_i(q_i, q_j) = q_i P_i(q_i + q_j) - C_i(q_i)$, où la fonction de demande inverse $P_i$ et le coût de production $C_i$ sont de classe $C^1$, et le revenu marginal $P_i + q_i \partial P_i / \partial q_i$ est décroissant en $q_j$.
Montrer l'existence d'un équilibre de Nash.

**Exercice 5. Variété des équilibres de Nash**

On considère la famille de jeux à un paramètre $\alpha \in I\!R$ :

| | $G$ | $D$ |
|---|---|---|
| $H$ | $\alpha, 0$ | $\alpha, 0$ |
| $M$ | $1, -1$ | $-1, 1$ |
| $B$ | $-1, 1$ | $1, -1$ |

Décrire la variété des équilibres de Nash de jeu en stratégies mixtes en fonction de $\alpha$ (Chapitre 5, FIG. 5.1).

**Exercice 6. Jeu de minorité**

On considère le jeu symétrique à 3 joueurs où chaque joueur choisit rouge ou blanc, et gagne 1 si il est seul de sa couleur et 0 sinon.

1) Décrire l'ensemble des équilibres de Nash en stratégies pures.
2) Décrire l'ensemble des équilibres de Nash en stratégies mixtes.

## 6. Feuille n°6

**Exercice 1. Théorème de Kakutani via l'existence d'équilibres de Nash à 2 joueurs** (McLennan et Tourki, 2006)

1) On considère une classe $\mathcal{G}$ de jeux $G$ à 2 joueurs définis par un espace fini d'actions $I$ et 2 familles de points $(x_i)_{i\in I}$, $(y_i)_{i\in I}$ dans $\mathbb{R}^K$. Le paiement du joueur 1 si $(i,j) \in I \times I$ est joué, est donné par

$$f(i,j) = -\|x_i - y_j\|^2$$

et celui du joueur 2 par

$$g(i,j) = \delta_{ij} \qquad (\text{ 1 si } i = j, \text{ 0 sinon}).$$

$G$ est donc un jeu bimatriciel et possède un équilibre noté $(\sigma, \tau)$.

Montrer que le support $S(\tau)$ de $\tau$ est inclus dans celui de $\sigma$, puis que $S(\sigma)$ est inclus dans $\{i \in I; x_i \text{ minimise } \|x_i - z\|^2\}$ où $z$ est la combinaison convexe des $y_j$ induite par $\tau$ :

$$z = \sum\nolimits_{j\in I} \tau_j y_j.$$

2) Soient $C$ un convexe compact non vide de $\mathbb{R}^K$, et $F$ une correspondance s.c.s. à valeurs convexes compactes non vides de $C$ dans lui même.

On définit inductivement les jeux $G_n = G(x_1, ..., x_n; y_1, ..., y_n)$ dans $\mathcal{G}$ comme suit : $x_1$ est arbitraire, $y_1 \in F(x_1)$ ; étant donné un équilibre $(\sigma_n, \tau_n)$ de $G_n$ on introduit $x_{n+1} = \sum_{i=1}^n \tau_n(i)\ y_i$ comme plus haut et $y_{n+1} \in F(x_{n+1})$.

2.1) Soit $x^*$ un point d'accumulation de la suite $\{x_n\}$. Soit $\varepsilon > 0$ et $N$ tels que $x_{N+1}$ et $x_m \in B(x^*, \varepsilon)$ pour un $m \le N$. Considérer un équilibre $(\sigma_N, \tau_N)$ de $G_N = G(x_1, ..., x_N; y_1, ..., y_N)$ et établir que $\{x_i, i \in S(\sigma_N)\} \subset B(x^*, 3\varepsilon)$ puis que $\{x_i, i \in S(\tau_N)\} \subset B(x^*, 3\varepsilon)$. Conclure que $x_{N+1} \in Co\{\cup_z F(z); z \in B(x^*, 3\varepsilon)\}$.

2.2 ) En déduire l'existence d'un point fixe pour $F$.

**Exercice 2. Equilibres parfaits et propres**

Soit $G$ un jeu fini sous forme stratégique donné par un ensemble de joueurs $N$, des ensembles d'actions $S^i$, $i \in N$, et des paiements $g^i$, $i \in N$.

1) Existence. Soit $\varepsilon$ fixé dans $]0,1[$.

Pour chaque joueur $i$, on définit $\eta^i = \varepsilon^{|S^i|}/|S^i|$ et $\Sigma^i(\eta^i) = \{\sigma^i \in \Delta(S^i), \sigma^i(s^i) \ge \eta^i\ \forall s^i \in S^i\}$, puis on pose $\Sigma(\eta) = \prod_{i\in I} \Sigma^i(\eta^i)$. Soit maintenant la correspondance :

$$\begin{aligned} F : \Sigma(\eta) &\longrightarrow \Sigma(\eta) \\ \sigma &\longmapsto \prod\nolimits_{i\in I} F^i(\sigma) \end{aligned}$$

où pour $i$ dans $I$ et $\sigma$ dans $\Sigma$,

$$F^i(\sigma) = \{\tau^i \in \Sigma^i(\eta^i), \forall s^i, t^i, (g^i(s^i, \sigma^{-i}) < g^i(t^i, \sigma^{-i})) \Longrightarrow \tau^i(s^i) \leq \varepsilon \tau^i(t^i)\}$$

1.1) Montrer que $F$ est à valeurs non vides.
1.2) Appliquer le théorème de Kakutani et conclure sur l'existence d'équilibre propre et parfait .

2) Calculer les équilibres de Nash, les équilibres parfaits et propres des jeux à deux joueurs suivants :

| | $L$ | $R$ |
|---|---|---|
| $T$ | (1,1) | (0,0) |
| $B$ | (0,0) | (0,0) |

| | $L$ | $M$ | $R$ |
|---|---|---|---|
| $T$ | (1,1) | (0,0) | (-9,-10) |
| $M$ | (0,0) | (0,0) | (-7,-10) |
| $B$ | (-10,-9) | (-10,-7) | (-10,-10) |

**Exercice 3. Jeu convexe**

On appelle *jeu convexe* un jeu à $n$ joueurs donné par des ensembles de stratégies $S_1, ..., S_n$, et des fonctions de paiements $G_1$,..., $G_n$ de $S = \prod_{i=1}^n S_i$ dans $I\!R$ tel que :
a) $S_i$ est convexe compact d'un espace Euclidien pour tout $i = 1, ..., n$.
b) $G_i(., s_{-i})$ est concave sur $S_i$ pour tout $s_{-i}$, pour chaque $i$.
c) $\sum_{i=1}^n G_i$ est continue sur $S$.
d) $G_i(s_i, .)$ est continue sur $S_{-i}$ pour tout $s_i$, pour chaque $i$.

On introduit la fonction $\Phi$, définie sur $S \times S$ par :

$$\Phi(s,t) = \sum\nolimits_{i=1}^n G_i(s_i, t_{-i})$$

1) Montrer que $t$ est un équilibre de Nash si et seulement si :

$$\Phi(s,t) \leq \Phi(t,t), \quad \forall s \in S.$$

2) On va prouver l'existence d'un équilibre du jeu convexe.
Par l'absurde, on suppose dans la suite que pour chaque $t$ il existe un $s$ avec

$$\Phi(s,t) > \Phi(t,t).$$

2.1) Montrer que la famille

$$(O_s = \{t \in S; \Phi(s,t) > \Phi(t,t)\})_{s \in S}$$

forme un recouvrement ouvert de $S$.

2.2) En déduire l'existence d'une famille finie $(s^k)_{k\in K}$ avec :

$$\forall t \in S, \quad \max_{k\in K} \Phi(s^k, t) > \Phi(t, t).$$

2.3) Remarquer alors que $\Theta$ définie par :

$$\Theta(t) = \frac{\sum_{k\in K} \phi_k(t) s^k}{\sum_k \phi_k(t)}$$

avec $\phi_k(t) = (\Phi(s^k, t) - \Phi(t, t))^+$, est une application continue de $S$ dans lui même. En déduire l'existence d'un point fixe $t^*$ de $\Theta$.

2.4) Obtenir une contradiction en remarquant que $\phi_k(t^*) > 0$ implique $\Phi(s^k, t^*) > \Phi(t^*, t^*)$.

**Exercice 4. Jeu de potentiel**

Soit $G : S = \prod_i S^i \to I\!R^n$ un jeu stratégique fini. On dira que $G$ est un jeu de potentiel $\Phi$, avec $\Phi : S \to I\!R$ si on a : $\forall i, \forall s^i, t^i \in S^i, \forall s^{-i} \in S^{-i}$

$$G^i(s^i, s^{-i}) - G^i(t^i, s^{-i}) = \Phi(s^i, s^{-i}) - \Phi(t^i, s^{-i}).$$

1) Montrer que $G$ d'une part et le jeu où le paiement de chaque joueur est $\Phi$ d'autre part, ont les mêmes équilibres de Nash .

En déduire que le jeu $G$ possède (au moins) un équilibre de Nash en stratégies pures.

2) Exemple 1 : Montrer que le jeu suivant est un jeu de potentiel et étudier ses équilibres de Nash

| | $b_1$ | $b_2$ |
|---|---|---|
| $a_1$ | $(2,2)$ | $(0,0)$ |
| $a_2$ | $(0,0)$ | $(1,1)$ |

3) Exemple 2 : On considère un jeu de congestion : 2 villes sont reliées par un ensemble $K$ de routes. $u^k(t)$ dénote le gain de chacun des usagers de la route $k$, s'ils sont en nombre $t$.

Le jeu est donc défini par $S^i = K$ pour chaque $i = 1, ..., n$ (chaque usager $i$ peut choisir une route $s^i$ dans $K$) et si $s = (s^1, ..., s^n)$ représente le profil des choix, alors le paiement d'un joueur $i$ qui choisit $s^i = k$ est $G^i(s) = G^i(k, s^{-i}) = u^k(t^k(s))$ où $t^k(s)$ est le nombre de joueurs $j$ pour lesquels $s^j = k$.

Montrer que $G$ est un jeu de potentiel $\Phi$ avec :

$$\Phi(s) = \sum_k \sum_{r=1}^{t^k(s)} u^k(r).$$

4) Soit $G$ un jeu quelconque de potentiel $\Phi$ et soit $\Sigma^i = \Delta(S^i)$. On note encore

par $G$ et $\Phi$ les extensions multilinéaires à $\Sigma = \Pi_i \Sigma^i$ (comme dans l'exercice 3).
On considére la dynamique du réplicateur sur $x \in \Sigma$ partant d'un point intérieur (i.e. $x^i(s^i)(0) > 0$ pour tout $i$ et $s^i \in S^i$) $x(0) \in \Sigma$, $\forall i, \forall s^i \in S^i$ :

$$\dot{x}^i(s^i)(t) = x^i(s^i)(t)[G^i(s^i, x^{-i}(t)) - G^i(x(t))]$$

où $x^i(s^i)(t)$ est la probabilité que le joueur $i$ joue $s^i$ à l'instant t (qui peut être interprétée comme étant la proportion des agents de type $s^i$ dans la population $i$ à l'instant $t$).
Montrer qu'elle s'écrit aussi, $\forall i, \forall s^i \in S^i$ :

$$\dot{x}^i(s^i)(t) = x^i(s^i)(t)[\Phi(s^i, x^{-i}(t)) - \Phi(x(t))].$$

On pose $\phi(t) = \Phi(x(t))$. Etablir que :

$$\dot{\phi}(t) = \sum\nolimits_i \Phi(\dot{x}^i(t), x^{-i}(t))$$

avec

$$\begin{aligned}\Phi(\dot{x}^i(t), x^{-i}(t)) &= \sum\nolimits_{s^i \in S^i} \dot{x}^i(s^i)(t)\Phi(s^i, x^{-i}(t)) \\ &= \sum\nolimits_{s^i \in S^i} x^i(s^i)(t)[\Phi(s^i, x^{-i}(t)) - \Phi(x(t))]\Phi(s^i, x^{-i}(t))\end{aligned}$$

Vérifier que

$$0 = \sum\nolimits_{s^i \in S^i} x^i(s^i)(t)[\Phi(s^i, x^{-i}(t)) - \Phi(x(t))]\Phi(x(t))$$

donc que

$$\Phi(\dot{x}^i(t), x^{-i}(t)) = \sum\nolimits_{s^i \in S^i} x^i(s^i)(t)[\Phi(s^i, x^{-i}(t)) - \Phi(x(t))]^2$$

En déduire, puisque $\phi$ est bornée, que la dynamique converge vers l'ensemble des équilibres de Nash.

5) Les notations sont comme dans la question 4) et on considère maintenant la dynamique sur $\Sigma$ de meilleure réponse qui est définie par :

$$\dot{x}^i(t) \in MR^i[x^{-i}(t)] - x(t),$$

où $MR^i[x^{-i}] = \{x^i \in \Sigma^i; G^i(x) \geq G^i(s^i, x^{-i}), \forall s^i \in S^i\}$.

On pose $F^i(x^{-i}(t)) = \max_{s^i \in S^i} \Phi(s^i, x^{-i}(t))$ et $\phi(t) = \Phi(x(t))$. Montrer que

$$\dot{\phi}(t) = \sum\nolimits_i [\Phi(\dot{x}^i(t) + x^i(t), x^{-i}(t)) - \Phi(x(t))] = \sum\nolimits_i [F^i(x^{-i}(t)) - \Phi(x(t))].$$

En déduire que tout point d'accumulation de la dynamique est un équilibre.

## 7. Feuille n°7

**Exercice 1. GNIM**

Pour $n, m$ deux entiers strictement positifs, on définit le jeu à deux joueurs $G(n, m)$ suivant. Soit $P(n, m)$ l'ensemble des points du plan $\mathbb{R}^2$ à coordonnées entières positives ou nulles dont l'abcisse est inférieure ou égale à $n$ et dont l'ordonnée est inférieure ou égale à $m$. Une pierre est placée sur chacun de ces points. Le joueur 1 joue en premier. Il choisit une pierre et enlève toutes les pierres dont les deux coordonnées sont supérieures ou égales à celles de la pierre choisie. C'est ensuite au joueur 2 de jouer selon la même règle. Le jeu se poursuit en alternant les joueurs. Celui qui prend la dernière pierre (i.e. (1,1)) a perdu. On définit de même le jeu $G(\infty, \infty)$ en prenant tous les points à coordonnées entières positives ou nulles, et les jeux $G(n, \infty)$ et $G(\infty, m)$.

1) Montrer que dans le jeu $G(n, m)$, le joueur 1 a une stratégie gagnante (on ne demande pas de la trouver).

2) Trouver une stratégie gagnante pour $G(n, n)$.

3) Etudier le jeu quand $n$ (et/ou $m$) est infini (commencer par le cas $n = 2$ et $m = \infty$).

**Exercice 2. Poker simplifié**

Deux joueurs jouent un jeu à somme nulle. La mise est de 1 par joueur pour commencer le jeu. Un jeu de 32 cartes est battu, et le joueur 1 tire 1 carte et la regarde. Le joueur 2 ne voit pas la carte.

Le joueur 1 décide alors soit de se coucher (abandon, et il donne alors sa mise au joueur 2), soit de doubler sa mise. Au cas où le joueur 1 a doublé la mise, le joueur 2 décide alors soit de se coucher (alors le joueur 1 gagne la mise initiale 1 du joueur 2), soit de doubler sa mise également. Dans ce dernier cas, le joueur 1 dévoile la carte tirée : si elle est Rouge, le joueur 1 ramasse toutes les mises (donc a gagné 2 ) ; si elle est noire, le joueur 2 ramasse les mises (donc a gagné 2 ).

Mettre ce jeu sous forme extensive, puis sous forme normale. Quelle est la valeur du jeu ? Quelles sont les stratégies mixtes optimales des joueurs ? Que sont les straégies de comportement optimales ?

**Exercice 3. Une drôle d'enchère**

Deux acheteurs potentiels participent à une enchère pour déterminer celui qui va remporter un bien donné. Le joueur $i$ lui accorde une valeur $v_i$. On a $v_1 > v_2 > 0$. Chaque joueur i fait une enchère $b_i \geq 0$. Celui qui fait la plus grande offre remporte l'objet mais paye l'enchère de son adversaire (c'est à dire le second prix $b_{-i}$). Quant

au perdant, il ne remporte pas l'objet mais est quand même contraint de payer l'offre qu'il a faite (c'est en ceci que notre enchère diffère d'une enchère au second prix classique). En cas d'égalité, le joueur 1 est désigné comme le gagnant et les mêmes règles s'appliquent. On ne considère ici que des stratégies pures.

1) Formulez le problème sous forme d'un jeu stratégique.

2) Existe-t-il un équilibre de Nash tel que $b_1 > 0$ et $b_2 > 0$, c'est à dire dans lequel les deux joueurs font une enchère strictement positive ?

3) $b_1 = b_2 = 0$ est-il un équilibre de Nash ?

4) Si $b_i = 0$ et $b_j > 0$, sous quelle condition sur $b_j$ le joueur $i$ n'a pas interêt surenchérir.

5) Donnez l'ensemble des équilibres de Nash. Le gagnant est-il nécessairement celui qui a la plus grande évaluation *a priori* de l'objet ? Combien paye le gagnant pour obtenir l'objet ?

**Exercice 4. Double enchère**

Un vendeur (joueur 1) et un acheteur (joueur 2) négocient la vente d'un bien indivisible. Le coût pour le vendeur est $c$ et la valeur pour l'acheteur est $v$. $c$ et $v$ sont indépendants, tirés selon la loi uniforme sur $[0, 1]$. Le vendeur et l'acheteur soumettent simultanément des offres $b_1$ et $b_2$. Si $b_1 > b_2$, l'échange n'a pas lieu. Sinon, l'échange a lieu et le prix est fixé à $(b_1 + b_2)/2$.

1) Calculer les paiements des deux joueurs.

2) On suppose que l'information est complète (i.e. $v$ et $c$ connus des deux joueurs) et que $v > c$. Montrer qu'il existe un continuum d'équilibres en stratégies pures.

3) On suppose que l'information est privé donc le jeu est à information incomplète et on cherche un équilibre en stratégies pures $b_1(c)$ et $b_2(v)$. Montrer que $b_1(\cdot)$ et $b_2(\cdot)$ sont nécessairement croissantes.

4) En supposant les $b_i(\cdot)$ strictement croissantes et $C^1$, donner le couple d'équations différentielles caractérisant les équilibres. Chercher un couple de solutions affines. A quelle condition y a t-il échange ?

**Exercice 5. Corrélation sur un signal**

On considère le jeu suivant :

| | L | R |
|---|---|---|
| U | 5,1 | 0,0 |
| D | 4,4 | 1,5 |

1) Calculer les équilibres de Nash (purs et mixtes) de ce jeu et les paiements d'équilibre correspondants.

On suppose que les deux joueurs considèrent avant le jeu la procédure suivante : on tire à pile ou face (événements équiprobables) ; après avoir observé le résultat, chaque joueur joue comme suit :
Si le résultat est PILE : 1 joue $U$ et 2 joue $L$
Si le résultat est FACE 1 joue $D$ 2 joue $R$.
Toutefois, une fois le jeu commencé, rien n'oblige un joueur à respecter cette procédure.

2) Montrer qu'une fois le jeu commencé, chaque joueur respecte la procédure (c'est à dire qu'aucun des joueurs n'a de deviation profitable).
On a en fait considéré une extension du jeu, et la situation décrite est donc un équilibre de Nash du nouveau jeu.

3) Quel est le paiement de ce nouvel équilibre ?

4) Quel est l'ensemble des paiements atteignables par ce procédé (coordination sur un signal public) lorsque la loi du signal aléatoire varie ?

On suppose maintenant que les joueurs peuvent réagir conditionnellement à des signaux différents mais corrélés. Pour illustrer ce cas, on suppose qu'une variable aléatoire possède trois états équiprobables $A$, $B$ et $C$. Le joueur ligne ne peut distinguer les états $B$ et $C$, et le joueur colonne ne peut distinguer les états $A$ et $B$. Les joueurs s'accordent sur la procédure suivante :
Joueur 1 : si A, jouer $U$, si {B,C} jouer $D$
Joueur 2 : si { A,B } jouer $L$, si C jouer $R$.

Une fois le jeu commencé, rien n'oblige un joueur à respecter cette procédure.

5) Vérifier qu'il s'agit bien d'un équilibre de Nash du jeu étendu, c'est à dire qu'une fois le jeu commencé, les joueurs respectent la procédure.

6) Calculer la probabilité d'occurrence de chaque issue du jeu initial. Quel est le paiement espéré des joueurs ? Ce paiement appartient-il à l'ensemble des paiements atteignables par le procédé introduit initialement (question 4) ?

**Exercice 6. Marchandage**

Deux joueurs négocient pour diviser 100 euros. Ils reçoivent zero si aucun accord n'est conclu. Nous allons analyser plusieurs modèles de jeux de marchandage avec offres alternatives.

1) (Jeu de l'ultimatum) Le joueur 1 commence par proposer un partage (soit $100 - x$ pour lui et $x$ pour l'autre joueur), avec $x \geq 0$. L'autre joueur peut accepter et dans ce cas le partage se fait ou refuser (et dans ce cas ils reçoivent chacun zero).

Ecrire la forme extensive du jeu et montrer qu'il existe un unique équilibre $S$-parfait.

2) Maintenant le jeu en 1) est joué $n$ fois avec une alternance des offres entre les joueurs. Le joueur 1 commence par proposer un partage. Le joueur 2 accepte ou refuse. Si le partage est accepté il se fait, sinon la somme à partager est divisée par deux (soit $\frac{100}{2} = 50$ euros) et les rôles sont inversés : maintenant c'est au tour du joueur 2 de faire une proposition de partage. Le joueur 1 peut accepter ou refuser. S'il accepte, le partage se fait sinon, la somme est encore divisée par deux et les rôles encore inversés. Trouver le (l'unique) paiement d'équilibre sous jeu quand $n$ tend vers l'infini ?

3) (Rubinstein 1982) On suppose ici que le jeu dure infiniment avec des offres alternatives comme en b). Maintenant la somme à partager est multipliée (après chaque refus) par un facteur $0 < \delta < 1$ (qu'on peut interpréter comme un taux d'escompte, ou comme la probabilité que le jeu continue ou encore comme le degré d'impatience des joueurs).

Montrer que la stratégie suivante est un équilibre sous jeu parfait : le joueur qui doit faire l'offre propose la fraction $\frac{1}{1+\delta}$ de la somme à partager pour lui et offre à l'autre joueur le reste. Celui-ci accepte toute offre lui donnant au moins cette proposition et refuse toute autre offre.

Pour conclure, montrer que c'est l'unique équilibre sous jeu parfait.

### Exercice 7. Jeu sous forme extensive

Soit $G$ un jeu fini sous forme extensive, sans coup de la chance. Soit $G'$ un jeu obtenu à partir de $G$ en raffinant certains ensembles d'information.

1) Soit $\sigma$ un équilibre en stratégies pures de $G$. Montrer que $\sigma$ reste un équilibre dans $G'$.

2) Le résultat dans 1) reste-il vrai si on remplace le mot "pures" par "mixtes" ? (sinon trouvez un contre-exemple)

3) Le résultat dans 1) reste-il vrai si il y a un coup de la chance ? (sinon trouvez un contre exemple).

### Exercice 8. Les piles de jetons

Voici les règles d'un jeu simple consistant à enlever des jetons d'une pile.

a) Il y a deux joueur, I et II.

b) Il y a une pile de 21 jetons au centre de la table.

c) Une action consiste à ôter un, deux ou trois jetons de la pile. Au moins un jeton doit être enlevé et pas plus de trois.

d) Les joueurs jouent à tour de rôle, I commence.

e) Le joueur qui prend le dernier jeton a gagné. (Le dernier joueur qui ôte un jeton gagne. Si vous ne pouvez enlever aucun jeton, vous avez perdu.)

1) Quel joueur préféreriez vous être, celui qui commence ou le second ? Quelle est une bonne stratégie ? est ce que la stratégie optimale est unique ?

2) Quelle est le joueur gagnant en fonction de $n$, où $n$ est le nombre initial de jetons.

**Exercice 9. Entrant et information incomplète**

On considère deux entreprises, l'une en place sur le marché (entreprise 1) et l'autre un entrant potentiel (entreprise 2). Suivant un événement aléatoire (décidé par la nature), l'entreprise 1 peut faire une innovation technologique (I) ou pas (P). Les événements I et P ont chacun probabilité 1/2. Si I est réalisé, l'entreprise 1 sera en mesure de battre n'importe quel concurrent.

Le déroulement du jeu est le suivant.

- I ou P se réalise de manière équiprobable. L'entreprise 1 est informée de cette réalisation mais pas l'entreprise 2.
- L'entreprise 1 décide de sortir du marché (S) ou de rester (R). Si elle sort, l'entreprise 1 fait un bénéfice de 0 et l'entreprise 2 (en position de monopole) fait un bénéfice de 4.
- Ayant observé le choix de l'entreprise 1, si celle-ci reste sur le marché, l'entreprise 2 choisit d'entrer sur le marché (E) et de faire concurrence à 1 ou de rester en dehors (D)
  - Si l'entreprise 2 reste en dehors, le bénéfice de l'entreprise 1 est de 4 et celui de l'entreprise 2 de 0.
  - Si l'entreprise 2 entre et que 1 est réalisé, le bénéfice de l'entreprise 1 est de 8 et celui de l'entreprise 2 de -4.
  - Si l'entreprise 2 entre et que P est réalisé, le bénéfice de l'entreprise 1 est de -4 et celui de l'entreprise 2 de 8.

1) Modéliser cette situation par un jeu sous forme extensive.

2) Donner la forme normale de ce jeu.

3) Calculer le ou les équilibres.

## 8. Feuille n°8

**Exercice 1. Valeur de l'information** (Kamien, Taumann et Zamir, 1990)

On considère le jeu à 2 joueurs suivant :
- étape 0 : une couleur (noir ou blanc) est choisie au hasard avec probabilité $(1/2, 1/2)$.
- étape 1 : le joueur 1 annonce une couleur et ce choix est communiqué au joueur 2.
- étape 2 : le joueur 2 annonce une couleur.

Le paiement est 2 pour chacun des joueurs si ils annoncent la même couleur et sinon 5 pour celui qui annonce la couleur tirée initialement et 0 pour l'autre.

1) Décrire le jeu sous forme extensive, puis sous forme normale et montrer qu'il possède un unique paiement équilibre $(5/2, 5/2)$.

2) On suppose désormais que le joueur 1 est informé du tirage initial (et que le joueur 2 le sait). Décrire le nouveau jeu sous forme extensive et montrer qu'il a un unique paiement d'équilibre.

3) Etudier enfin la situation où le joueur 2 seul est informé puis celle où les 2 joueurs connaisent le tirage initial.

4) Que peut-on dire de la "valeur de l'information" ? Quelles sont les hypothèses sur la connaissance des agents pour qu'ils puissent la calculer ?

**Exercice 2. Transmission stratégique d'information**

On considère une interaction à deux joueurs dans laquelle un état de la nature $k = 1, 2$ est choisi au hasard de manière équiprobable. Cet état est observé par le joueur 1 mais pas par le joueur 2. Le joueur 1 doit alors envoyer un message $m \in \{A, B\}$ au joueur 2. Le joueur 2 devra choisir une action $s \in \{G, M, D\}$. Le paiement de chaque joueur dépend uniquement de $k$ et $s$. Les couples de paiements sont les suivants :

Etat $k = 1$ : $G \to$ (0,6) ; $M \to$ (2,5) ; $D \to$ (0,0).

Etat $k = 2$ : $G \to$ (0,0) ; $M \to$ (2,5) ; $D \to$ (2,12).

1) Ecrire la forme extensive de ce jeu en précisant les espaces de stratégies.

2) Déterminer les équilibres de Nash en stratégies pures de ce jeu. On distinguera notamment suivant le nombre (1 ou 2) de messages différents envoyés par le joueur 1. Calculer les paiements d'équilibre pour chaque joueur. Quel est l'équilibre le plus favorable au joueur 1 ?

3) Montrer que le couple de stratégies suivant est un équilibre.

Joueur 1 : jouer $A$ si $k = 1$ et ($A$ avec probabilté $1/2$ ; $B$ avec probabilité $1/2$) si $k = 2$ ;

Joueur 2 : jouer $M$ si $A$ et $D$ si $B$.

Calculer le paiement de cet équilibre. Le joueur 1 a t-il intéret à réveler son information (complètement, pas du tout, partiellement) ?

**Exercice 3. Équilibre corrélé versus Nash**

A) Montrer que le jeu suivant

| | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ |
|---|---|---|---|
| $a_1$ | $(-\infty,-\infty)$ | $(3,1)$ | $(0,2)$ |
| $a_2$ | $(1,3)$ | $(0,0)$ | $(1,-\infty)$ |
| $a_3$ | $(2,0)$ | $(-\infty,1)$ | $(0,0)$ |

ne possède pas d'équilibre de Nash mais que toute distribution de la forme

| | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ |
|---|---|---|---|
| $a_1$ | 0 | $\alpha$ | 0 |
| $a_2$ | $\beta$ | $\gamma$ | 0 |
| $a_3$ | 0 | 0 | 0 |

avec $\alpha\beta\gamma > 0$ est une distribution d'équilibre corrélé.

B) (Peleg) Soit le jeu avec un nombre infini dénombrable de joueurs $\{1, 2, ..., n, ...\} = \mathbb{N}^*$. On suppose que tous les joueurs ont seulement deux stratégies 0 ou 1 (soit $S_i = \{0,1\}$). La fonction de paiement du joueur $i$ est :

$$g_i(s) = \begin{cases} s_i, & \text{si } \sum_j s_j < \infty \\ -s_i, & \text{sinon.} \end{cases}$$

1) Montrer qu'il n'existe pas d'équilibre de Nash en stratégies pures.

2) En utilisant le lemme de Borel Cantelli montrer qu'il n'existe pas d'équilibre de Nash en stratégies mixtes.

3) Montrer que la distribution $\mu = \frac{\mu_1}{2} + \frac{\mu_2}{2}$ sur $S = \prod_i S_i = \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ induit un équilibre corrélé, où $\mu_1$ est la distribution (produit) $\mu_1 = \bigotimes_i \mu_1^i$ avec : $\mu_1^i(s_i = 1) = \frac{1}{i}$ et $\mu_2$ est la distribution (jointe) qui tire le profil $(s_1 = 1, ...s_i = 1, s_{i+1} = 0, ..., s_n = 0, ...)$ avec probabilité $\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} = \frac{1}{i(i+1)}$.

(Remarquer que $P_{\mu_1}(\sum s_i = \infty) = 1$, que $P_{\mu_2}(\sum s_i = \infty) = 0$ et que $P_{\mu_2}(s_i = 1) = \frac{1}{i}$.)

**Exercice 4. Corrélé via minmax** (Hart et Schmeidler, 1989)

Soit $G$ un jeu stratégique à 2 joueurs, décrit par les espaces de stratégies $S^1$ et $S^2$ et le paiement $g : S = S^1 \times S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. On considère le jeu $\Gamma$ à 2 joueurs et à somme

nulle où les espaces de stratégies sont $S$ et $L = (S^1)^2 \cup (S^2)^2$ et le paiement $\gamma$ avec :

$$\gamma(s; t^i, u^i) = (g^i(t^i, s^{-i}) - g^i(u^i, s^{-i}))\mathbf{1}_{\{t^i = s^i\}}$$

1) Vérifier que le jeu a une valeur $v$ et des stratégies optimales.

2) Montrer que si $v \geq 0$ et $Q \in \Delta(S)$ est une stratégie optimale du joueur 1, alors $Q$ est une distribution d'équilibre corrélé dans $\Gamma$.

3) Soit $\pi \in \Delta(L)$. On définit une probabilité de transition sur $S^1$, $\rho^1$ par :

$$\rho^1(t^1; u^1) = \pi(t^1, u^1), \text{si } t^1 \neq u^1$$

$$\rho^1(t^1; t^1) = 1 - \sum\nolimits_{u^1 \neq t^1} \pi(t^1, u^1).$$

Soit $\mu^1$ une probabilité sur $S^1$ invariante par $\rho^1$ :

$$\mu^1(t^1) = \sum\nolimits_{u^1} \mu^1(u^1)\rho^1(u^1; t^1).$$

On définit $\rho^2$ et $\mu^2$ de la même manière et l'on pose $\mu = \mu^1 \times \mu^2$. Montrer que le paiement $\gamma(\mu; \pi)$ se décompose en termes de la forme

$$\sum\nolimits_{t^1} \mu^1(t^1) \sum\nolimits_{u^1} \rho(t^1; u^1)(g^1(t^1, .) - g^1(u^1, .))$$

et en déduire :
$\forall \pi \in \Delta(L), \exists \phi \in \Delta(S)$ satisfaisant : $\gamma(\phi, \pi) \geq 0$.

4) Etablir alors l'existence d'équilibres corrélés dans $G$.

5) Etendre la démonstration aux jeux à $n$ joueurs.

**Exercice 5. Équilibre corrélé : somme nulle**

1) On se place dans un jeu fini à 2 joueurs et à somme nulle défini par une matrice $A = G^1 = -G^2$. On note $S^1$ l'ensemble des stratégies pures du joueur 1, $S^2$ l'ensemble des stratégies pures du joueur 2, et $S = S^1 \times S^2$. On rappelle qu'une distribution d' équilibre corrélé (DEC) est un élement $\pi$ de $\Delta(S)$ (l'ensemble des probabilités sur $S$) tel que, pour tout joueur $i$ et tout couple de stratégies $(s^i, t^i) \in S^i \times S^i$ on a

$$\sum\nolimits_{s^{-i} \in S^{-i}} G^i(s^i, s^{-i})\pi(s^i, s^{-i}) \geq \sum\nolimits_{s^{-i} \in S^{-i}} G^i(t^i, s^{-i})\pi(s^i, s^{-i}).$$

Le paiement (total espéré) du joueur $i$ est $G^i(\pi) = \sum_{s \in S} \pi(s^1, s^2)G^i(s^1, s^2)$.

1.1) Montrer que le seul paiement d'équilibre corrélé $\pi$ est $(v, -v)$, où $v = \mathtt{val}A$.

1.2) Soit $\pi$ une DEC de $A$, et $s^1$ une stratégie pure du joueur 1 qui a une probabilité positive sous $\pi$. Montrer qu'alors la probabilité conditionnelle $\pi(.|s^1) \in \Delta(S^2)$ est une stratégie optimale du joueur 2.

2.) On considère le jeu suivant à somme nulle

| | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ |
|---|---|---|---|
| $a_1$ | 0 | 0 | 1 |
| $a_2$ | 0 | 0 | $-1$ |
| $a_3$ | $-1$ | 1 | 0 |

2.1) Etablir que

| | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ |
|---|---|---|---|
| $a_1$ | 1/3 | 1/3 | 0 |
| $a_2$ | 1/3 | 0 | 0 |
| $a_3$ | 0 | 0 | 0 |

est une distribution d'équilibre corrélé.
2.2) Est-ce une distribution qui est le produit de stratégies optimales des joueurs ?
2.3) Décrire l'ensemble des DEC.

**Exercice 6. Équilibres corrélés et équilibres de Nash**

1) Donner tous les équilibres de Nash en stratégies mixtes du jeu à deux joueurs suivant :

| | $G$ | $D$ |
|---|---|---|
| $H$ | $(2,2)$ | $(0,0)$ |
| $B$ | $(0,0)$ | $(2,2)$ |

2) Considérons le jeu à trois joueurs suivant. Le joueur 1 a deux actions : $H$ ou $B$. Le joueur 2 a deux actions : $G$ ou $D$. Le joueur 3 a une infinité d'actions : il choisit un entier relatif $z$. Les paiements sont les suivants :

| | $G$ | $D$ |
|---|---|---|
| $H$ | $(2,2,3+1/z)$ | $(0,0,8)$ |
| $B$ | $(0,0,0)$ | $(2,2,0)$ |

$z<0$

| | $G$ | $D$ |
|---|---|---|
| $H$ | $(2,2,2)$ | $(0,0,0)$ |
| $B$ | $(0,0,0)$ | $(2,2,2)$ |

$z=0$

| | $G$ | $D$ |
|---|---|---|
| $H$ | $(2,2,0)$ | $(0,0,0)$ |
| $B$ | $(0,0,8)$ | $(2,2,3-1/z)$ |

$z>0$

Le joueur 1 choisit la ligne, le joueur 2 la colonne, le joueur 3 la matrice. Ainsi, si le joueur 1 choisit H, le joueur 2 G et le joueur 3 $z=-4$, les joueurs 1 et 2 ont chacun un paiement de 2 et le joueur 3 a un paiement de 2,75.
2.1) Montrer que ce jeu n'a pas d'équilibre de Nash.
2.2) Montrer qu'il existe un équilibre corrélé dans lequel le joueur 3 joue $z=0$.

# 9. Eléments de correction

## Feuille 1

**Exercice 1 :**

1) L'algorithme est bien défini car si un homme a épuisé sa liste, il est passé chez toutes les femmes. Donc chacune des femmes a eu au moins un homme chez elle, et a donc exactement un homme chez elle, ce qui a terminé l'algorithme.

Pour montrer que l'algorithme s'arrête en moins de $n^2$ jours, on peut considérer la variable d'état qui indique, pour chaque homme, le nombre de femmes qu'il a visitées. L'algorithme s'arrête si l'un des hommes a visité les $n$ femmes. Tant que l'algorithme continue, au moins un homme visite une nouvelle femme le lendemain.

2) 1er exemple : 3 mariages stables : $((a,A),(b,B),(c,C))$, $((b,A),(c,B),(a,C))$ et
$((c,A),(a,B),\ (b,C))$.
2ème exemple : un unique mariage stable : $((c,A),(d,B),(a,C),(b,D))$.

3) OK par contradiction

4) Soient, par exemple, 4 étudiants $A$, $B$, $C$, $D$ où : $D$ est le moins préféré de chacun des 3 autres étudiants, et $A$ préfère en premier $B$, $B$ préfère en premier $C$, et $C$ préfère en premier $A$.

5) idem avec l'algorithme où : chaque étudiant postule d'abord à son école préférée, puis à son 2ème choix en cas de refus etc... et une école de quota $q$ gère une liste d'attente comprenant ses étudiants préférés (au maximum $q$) parmi ceux qui se sont présentés chez elle. L'algorithme termine si chaque étudiant est soit sur une liste d'attente, soit rejeté partout. Les listes d'attente sont alors déclarées admises.

**Exercice 2 :**

1) Notons $x^* = f^{-1}(1/2)$ et $y^* = g^{-1}(1/2)$. En s'arrêtant en $x^*$, le joueur 1 garantit 1/2. En s'arrêtant en $y^*$, le joueur 2 garantit 1/2. Remarquons que le joueur 1 n'a jamais intérêt à s'arrêter avant $x^*$, et le joueur 2 avant $y^*$.

2) Si $x^* \leq y^*$, il est vraisemblable que les 2 joueurs arrêtent en $y^*$, avec un paiement $f(y^*)$ pour le joueur 1 et 1/2 pour le joueur 2. Si $x^* > y^*$, il est vraisemblable que le joueur 1 s'arrête en $x^*$, et le joueur 2 très légèrement avant $x^*$ (voir la notion de $\varepsilon$-équilibre).

3) pas de réponse claire, une possibilité pour le joueur 1 (resp. joueur 2) est de couper en $x^*$ (resp. $y^*$), ce qui constitut une stratégie prudente garantissant au moins

1/2 dans tous les cas.

4) non (on peut penser à un gâteau avec une framboise du côté gauche et une pépite de chocolat du côté droit, avec le joueur 1 qui adore la framboise et le joueur 2 qui adore le chocolat).

**Exercice 3 :**

1) $(x_t)_t$ est décroissante positive, et $x_t \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$.

2) $u(V,x) = x$, et $u(B,x) = x - 1/2$ pour tout $x$.

3) On a $y_t =_{def} (x_t - 1/3)^2 \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$.

4) et 5) dessiner.

**Exercice 4 :**

Fixons un joueur $i$, notons $p_i$ le prix proposé par ce joueur, $p_{-i} = (p_j)_{j\neq i}$ le vecteur des prix des autres joueurs, et $p^* = \max_{j\neq i} p_j$. L'utilité du joueur $i$ vaut 0 si $p_i < p^*$, elle vaut $v_i - p^*$ si $p_i > p^*$, et elle est comprise entre 0 et $v_i - p^*$ si $p_i = p^*$. Il faut montrer que $u_i(v_i, p_{-i}) \geq u_i(p_i, p_{-i})$ pour tous $p_i$ et $p_{-i}$.

Si $v_i > p^*$, on a $u_i(v_i, p_{-i}) = v_i - p^* > 0$ et $v_i - p^* \geq u_i(p_i, p_{-i})$.

Si $v_i = p^*$, on a $u_i(v_i, p_{-i}) = 0 = u_i(p_i, p_{-i})$.

Si $v_i < p^*$, on a $u_i(v_i, p_{-i}) = 0 \geq u_i(p_i, p_{-i})$.

## Feuille 2

**Exercice 1 :**

1.1) sup, inf existent et sont atteints : $\Delta(I)$ et $\Delta(J)$ sont compacts.

Si $\lambda_0 > \mu_0$, alors $s_0(A - \mu_0 B) > 0$. Contradiction avec $(A - \mu_0 B)t_0 \leq 0$. Donc on suppose $\lambda_0 < \mu_0$.

1.2) Si oui, alors $(A - \lambda_0 B)t_0 > 0$. Contradiction avec $s_0(A - \lambda_0 B) = 0$.

1.3) Pour faciliter l'écriture, supposons sans perte de généralité que les colonnes de $J'$ se trouvent toutes "au début" : $J = \{1, ..., |J|\}$ et $J' = \{1, ..., |J'|\}$. On a $s_0(A - \lambda_0 B) = (0, ..., 0, > 0, > 0, ..., > 0)$, où les 0 correspondent aux éléments de $J'$ et les $> 0$ à ceux de $J \backslash J'$.

On se restreint aux composantes $I \times J'$ de $A$ et $B$. On trouve $v'$, $s'$ par hypothèse de récurrence. On a $s'(A - v'B) = (\geq 0, ..., \geq 0, ?, ..., ?)$.

L'ensemble $\{\mu, \exists t \in \Delta(J'), (A - \mu B)t \leq 0\}$ est inclus dans $\{\mu, \exists t \in \Delta(J), (A - \mu B)t \leq 0\}$, donc on a $v' \geq \mu_0$ (intuition claire : moins de stratégies pour J2 $\Longrightarrow$ moins bien pour $J2$).

D'où $v' > \lambda_0$. Donc $s'(A-\lambda_0 B) = (>0,...,>0,?,?,...,?)$. Alors il existe $\alpha \in (0,1)$ tq $(\alpha s' + (1-\alpha)s_0)(A-\lambda_0 B) = (>0,...,>0,...,>0)$. Enfin il existe $\lambda > \lambda_0$ tq $(\alpha s' + (1-\alpha)s_0)(A-\lambda B) = (>0,...,>0,...,>0)$. Contradiction avec la définition de $\lambda_0$.

1.4) par récurrence (demonstration symétrique s'il existe $I' \neq I$ tel que : $(A_i t_0 - \mu_0 B_i t_0 = 0$ ssi $i \in I'))$.

2) Prendre $B$ avec que des 1.

3) Prendre $A = Id$. Il existe $s$ et $t$ tels que $s \geq vsB$ et $t \leq vBt$. Comme $t \leq vBt$, nécessairement $v > 0$. Comme $s(Id - vB) \geq 0$, vue la forme de $Id - vB$ la stratégie $s$ a support plein. Comme $s(Id - vB)t = 0$, il vient $(Id - vB)t = 0$. $Bt = \frac{1}{v}t$, $t$ est un vecteur propre pour $B$. $t \in \Delta(I)$, donc toutes les coordonnées de $Bt$ sont strictement positives. Et alors $t$ aussi a toutes ses coordonnées strictement positives.

**Exercice 2 :**

Notons $\alpha = \max_{(x,y)} \min_z g(x,y,z)$. $\alpha = \max_{(x,y)\in[0,1]^2} \min\{xy, (1-x)(1-y)\}$. Posons $a = xy$ et $b = (1-x)(1-y)$. $ab = x(1-x)y(1-y) \leq 1/16$, donc $\min\{a,b\} \leq 1/4$, et $\alpha \leq 1/4$. Prendre $x = y = 1/2$ donne $\alpha = 1/4$.

Notons $\beta = \min_z \max_{(x,y)} g(x,y,z)$. $\beta = \min_{z\in[0,1]} \max\{z, 1-z\} = 1/2$.

On a donc $\alpha < \beta$.

*Remarque :* autorisons maintenant les joueurs 1 et 2 à corréler leurs actions, c'est-à-dire à jouer une stratégie $t \in \Delta(\{H,B\} \times \{G,D\})$. Notons $g(t,z)$ l'espérance de $g$ sous la probabilité induite par $t$ et $z$. On a alors $\max_t \min_z g(t,z) = \min_z \max_t g(t,z) = 1/2$.

**Exercice 3 :**

1) Notons $v = \limsup v_n$. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. On prend $n$ tq $v_n \geq v - \varepsilon$, et tq : $(|x-y| \leq \frac{1}{2^{n+1}})$ entraîne $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.

Considérons $\sigma_n$ optimale pour $J1$ dans $G_n$. Soit $t$ dans $[0,1]$ une stratégie du $J2$. Il existe $t_n$ dans $Y_n$ tel que $|t - t_n| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$. On a :

$$f(\sigma_n, t) = f(\sigma_n, t_n) + \int_s f(s,t) - f(s,t_n) d\sigma_n(s) \geq v - \varepsilon - \varepsilon.$$

Donc $f(\sigma_n, \tau) \geq v - 2\varepsilon$ pour tout $\tau$ et $\sigma_n$ garantit $v - 2\varepsilon$ dans $G$. Le $J1$ garantit donc $\limsup_n v_n$ dans $G$ (à $\varepsilon$ près pour tout $\varepsilon > 0$).

De même, on montre que le $J2$ garantit $\liminf_n v_n$ (à $\varepsilon$ près pour tout $\varepsilon > 0$). Donc nécessairement $\liminf_n v_n \geq \limsup_n v_n$. D'où $(v_n)_n$ converge vers $v$, et $v$ est la valeur de $G$.

2) Pour tout $n$, on considère $\sigma_n$ optimale du $J1$ dans $G_n$, et $F_n : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ la

suite de fonctions de répartition associée.

(Par exemple), on peut trouver, en appliquant le théorème de Tychonoff, une sous-suite $(F_{\phi(n)})_n$ qui converge simplement vers une fonction $F : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$. $F$ est croissante, $F(0) = 0$ et $F(1) = 1$, mais $F$ n'est pas nécessairement continue à droite. Notons $\hat{F}$ sa regularisée s.c.s., i.e. $\hat{F}(x) = \inf_{\varepsilon>0} \sup_{y \in B(x,\varepsilon)} F(y)$. Alors $\hat{F}$ est continue à droite, c'est la fonction de répartition d'une loi de probabilité $\sigma$ sur $[0,1]$. On a maintenant convergence simple de $F_n(x)$ vers $\hat{F}(x)$ en tout point $x$ de continuité de $\hat{F}$. Donc $(\sigma_n)_n$ converge en loi vers $\sigma$ : pour tout $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, $\mathbb{E}(g(\sigma_n))$ converge vers $\mathbb{E}(g(\sigma))$. On applique pour chaque $t$ à $g = f(.,t)$, et on obtient : $f(\sigma,t) \geq v$ pour tout $t$. Donc $\sigma$ est une stratégie optimale du $J1$ dans $G$ (et de même le $J2$ a une stratégie optimale).

*Remarque :* on a (re)demontré que $\Delta([0,1])$ est compact pour la topologie de la convergence en loi (topologie faible-*).

**Exercice 4 :**

1) Soit $y_n = \Pi_C(\overline{x}_n)$ alors :

$$d_{n+1}^2 \leq \|\overline{x}_{n+1} - y_n\|^2 = \|\overline{x}_n - y_n\|^2 + \|\overline{x}_{n+1} - \overline{x}_n\|^2 + 2\langle \overline{x}_{n+1} - \overline{x}_n, \overline{x}_n - y_n \rangle$$

qui se décompose

$$\langle \overline{x}_{n+1} - \overline{x}_n, \overline{x}_n - y_n \rangle = (\frac{1}{n+1}) \langle x_{n+1} - \overline{x}_n, \overline{x}_n - y_n \rangle$$
$$= (\frac{1}{n+1})(\langle x_{n+1} - y_n, \overline{x}_n - y_n \rangle - \|\overline{x}_n - y_n\|^2).$$

Nous obtenons alors en utilisant l'hypothèse :

$$d_{n+1}^2 \leq (1 - \frac{2}{n+1})\ d_n^2 + (\frac{1}{n+1})^2 \|x_{n+1} - \overline{x}_n\|^2.$$

Puisque

$$\|x_{n+1} - \overline{x}_n\|^2 \leq 2\|x_{n+1}\|^2 + 2\|\overline{x}_n\|^2 \leq 4M^2,$$

on déduit

$$d_{n+1}^2 \leq (\frac{n-1}{n+1})\ d_n^2 + (\frac{1}{n+1})^2\ 4M^2.$$

D'où par récurrence :

$$d_n \leq \frac{2M}{\sqrt{n}}.$$

2.1) Nous avons, par construction $\langle s_{n+1}A, t_{n+1}\rangle \geq 0$, autrement dit

$$\left\langle x_{n+1}, \bar{x}_n^+ - \bar{x}_n \right\rangle \geq 0$$

ou encore que $\langle x_{n+1}, \bar{x}_n - \bar{x}_n^+\rangle \leq 0$. Puisque $\langle \bar{x}_n^+, \bar{x}_n - \bar{x}_n^+\rangle = 0$ cela implique

$$\langle x_{n+1} - \bar{x}_n^+, \bar{x}_n - \bar{x}_n^+\rangle \leq 0$$

et il suffit de remarquer que $\bar{x}_n^+ = \Pi_C(\bar{x}_n)$.

2.2) Il suffit d'interpréter les fréquences empiriques dans $\bar{x}_n$ comme une stratégie mixte du joueur ligne.

**Exercice 5 :**

1) En jouant $a_1$ le joueur 1 assure un paiement $\geq 1$. En jouant $b_1$ le joueur 2 assure que le paiement (du joueur 1) est $\leq 1$. Donc la valeur vaut 1, quel que soit $x$.

La seule stratégie optimale du joueur 2 est $b_1$ (considérer la stratégie $a_1$ du joueur 1). La seule stratégie optimale du joueur 1 est $a_1$ (considérer la stratégie $b_1$ du joueur 2). Ceci est valable pout toute valeur de $x$.

2) La stratégie $a_2$ est strictement dominée par 0,51 $a_3$+ 0,49 $a_1$. Donc on peut l'éliminer pour calculer la valeur et les stratégies optimales.

| | $b_1$ | $b_2$ |
|---|---|---|
| $a_1$ | 3 | $-1$ |
| $a_3$ | $-2$ | 1 |

Soit $(x, y)$ un couple de stratégies optimales ($x$ étant la probabilité que le joueur 1 joue $a_1$, $y$ celle que le joueur 2 joue $b_1$). Il est facile de voir que $x = 1$ et $x = 0$ sont impossibles, donc $x \in ]0,1[$, ce qui implique : $3y - (1 - y) = -2y + (1 - y)$. D'où $y = 2/7$. $2/7 \in ]0,1[$, donc $3x - 2(1 - x) = -x + (1 - x)$, soit $x = 3/7$. Il y a donc une unique stratégie optimale pour chaque joueur, et la valeur est le paiement donné par ces stratégies, soit $1/7$.

**Exercice 6 :**

Il suffit de remarquer que jouer la stratégie $i$ avec probabilité $\frac{\frac{1}{a_i}}{\sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j}}$ rend l'autre joueur indifférent entre toutes ses stratégies, avec le paiement $v = \frac{1}{\sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j}}$. $v$ est donc la valeur du jeu.

## Feuille 3

**Exercice 1 :**

1) la fonction de gain du joueur 1 est :

$$g(x,y) = \begin{cases} p_1(x) + (1 - p_1(x)(-1) & = 2p_1(x) - 1 \quad si \quad x < y \\ p_1(x)(1 - p_2(x)) + p_2(x)(1 - p_1(x))(-1) & = p_1(x) - p_2(x) \quad si \quad x = y \\ (-1)p_2(y) + (1 - p_1(y) & = 1 - 2p_2(y) \quad x > y \end{cases}$$

Soit $t_0 \in ]0,1[$ tel que $p_1(t_0) + p_2(t_0) = 1$. On montre que $g(t_0,t_0) = 2p_1(t_0) - 1$, que $g(t_0,y) \geq 2p_1(t_0) - 1$ pour tout $y$, et que $g(x,t_0) \leq 2p_1(t_0) - 1$ pour tout $x$. Donc $(t_0,t_0)$ est un point-selle du jeu. La stratégie optimale d'un joueur est de tirer à l'instant même où la probabilité de tuer l'adversaire égale la probabilité de survie. A l'équilibre les joueurs tirent en même temps.

2) On peut montrer le résultat par récurrence, en notant $(H_K)$ l'hypothèse :

$(H_K)$ Quand il y a $(m,n)$ balles et que $m+n \leq K$, la valeur en stratégies pures existe et vaut $\frac{m-n}{m+n}$, et une stratégie optimale du joueur qui a $\max(m,n)$ balles est de tirer pour la première fois à $t = \frac{1}{m+n}$.

$(H_1)$ est vraie. Supposons $(H_K)$ vraie pour un $K \geq 1$, et notons $(m',n) = (m+1,n)$ le nombre de balles. On peut facilement supposer que $n > 0$ et $m' > 0$. On fait 3 cas selon le joueur qui a le plus de balles.

<u>Cas 1</u> : $m' > n > 0$. On définit la stratégie $\sigma$ du joueur 1 qui : face à une histoire silencieuse, tire pour la première fois en date $\frac{1}{m+n+1}$ puis en cas d'echec joue une stratégie optimale du jeu $(m,n)$ ; et si le joueur 2 tire et rate avant $\frac{1}{m+n+1}$, le joueur 1 joue une stratégie optimale du jeu $(m+1,n-1)$.

Si le $J2$ ne tire pas avant $\frac{1}{m+n+1}$, le joueur 1 utilisant $\sigma$ gagne au moins :

$$\frac{1}{m+n+1} + \frac{m+n}{m+n+1}\ \frac{m-n}{m+n} = \frac{m+1-n}{m+n+1}.$$

Si le $J2$ tire en $\frac{1-\varepsilon}{m+n+1} < \frac{1}{m+n+1}$, le joueur 1 utilisant $\sigma$ gagne au moins :

$$\frac{1-\varepsilon}{m+n+1}(-1) + \frac{m+n+\varepsilon}{m+n+1}\ \frac{m+1-(n-1)}{m+n} > \frac{m+1-n+\varepsilon}{m+n+1}.$$

Et si le $J2$ tire pour la première fois exactement en $\frac{1}{m+n+1}$, le joueur 1 utilisant $\sigma$ gagne au moins :

$$0 + \left(\frac{m+n}{m+n+1}\right)^2 \frac{m-n+1}{m+n-1} > \frac{m+1-n}{m+n+1}.$$

Par conséquent, $\sigma$ garantit $\frac{m+1-n}{m+n+1}$ au joueur 1.

Définissons maintenant, pour $\varepsilon > 0$ petit, la stratégie aléatoire $\tau$ du joueur 2 qui, face à une histoire silencieuse, tire pour la première fois selon la loi uniforme sur $[\frac{1}{m+n+1}, \frac{1+\varepsilon}{m+n+1}]$, et joue optimalement dès qu'une balle a été tirée. Si le joueur 1 tire pour la première fois avant le joueur 2, son paiement est au plus $\frac{1+\varepsilon}{m+n+1} + \frac{m+n-\varepsilon}{m+n+1}\frac{m-n}{m+n} \leq \frac{m+1-n+\varepsilon}{m+n+1}$. Si le joueur 1 tire pour la première fois après le joueur 2, le paiement du joueur 1 est au plus $\frac{1}{m+n+1}(-1) + \frac{m+n}{m+n+1}\frac{m+2-n}{m+n} = \frac{m+1-n}{m+n+1}$.

Le joueur 2 garantit également $\frac{m+1-n}{m+n+1}$ (à $\varepsilon$-près pour tout $\varepsilon$), qui est donc la valeur du jeu (notons que le $J2$ n'a pas de stratégie $\varepsilon$-optimale pure ici). Donc dans le cas 1 $(H_{K+1})$ est vraie.

Cas 2 : $m' = n$.

Soit $\sigma$ (resp. $\tau$) la stratégie du joueur 1 (resp. joueur 2) qui face à une histoire silencieuse, tire pour la première fois en date $\frac{1}{m+n+1}$, et joue optimalement dès qu'une balle a été tirée.

Si le joueur 1 tire pour la première fois avant $\frac{1}{m+n+1}$, soit à une date $t = \frac{1-\varepsilon}{m+n+1}$ avec $\varepsilon > 0$, son paiement contre $\tau$ est au plus $g(t,\tau) = \frac{1-\varepsilon}{m+n+1} + \frac{m+n+\varepsilon}{m+n+1}\frac{(-1)}{m+n} < 0$.

Si le joueur 1 tire pour la première fois en $t > \frac{1}{m+n+1}$, son paiement contre $\tau$ est au plus $g(t,\tau) = \frac{-1}{m+n+1} + \frac{m+n}{m+n+1}\frac{1}{m+n} = 0$.

On a donc $g(t,\tau) \leq 0$ pour tout $t$, et par symétrie $(\sigma,\tau)$ est un point-selle du jeu. $(H_{K+1})$ est prouvée dans le cas 2.

Cas 3 : $m' < n$. ... (similaire au cas 1).

3.1) la fonction de paiement est la suivante :

$$g(x,y) = \begin{cases} x + (1-x)y(-1) & = -(1-x)y + x \quad si \quad x < y \\ x(1-x) + x(1-x)(-1) & = 0 \quad si \quad x = y \\ (-1)y + (1-y)x & = -(1+x)y + x \quad si \quad x > y \end{cases}$$

Si $y > 0$, jouer $x$ juste avant $y$ donne $\sup_x g(x,y) \geq y^2$. Et si $y < 1$, on a $g(1,y) = 1 - 2y$, donc $\inf_y \sup_x g(x,y) > 0$. Or le jeu est symétrique donc la valeur, si elle existe, ne peut être que zéro. Il n'y a pas de valeur en stratégie pures.

3.2) Supposons maintenant que le joueur 1 ait une stratégie mixte $\sigma$ de de densité $f$ sur $[\alpha, 1]$, où $\alpha > 0$ et $f$ est différentiable, qui garantisse un paiement positif ou nul. Alors par symétrie, $\sigma$ garantit aussi 0 pour le joueur 2, et donc on s'attend à avoir : pour tout $y \geq \alpha$, $g(\sigma, y) = 0$ et donc :

$$-y + (1+y)\int_a^y xf(x)dx + (1-y)\int_y^1 xf(x)dx = 0.$$

On dérive 2 fois et on trouve $yf'(y) + 3f(y) = 0$. D'où l'on tire $f(y) = Cy^{-3}1_{y \geq a}$, pour une constante $C$ bien choisie. On reporte dans l'équation du dessus et on obtient $C = 1/4$, et $a = 1/3$. Il suffit alors de vérifier les calculs précédents.

4) La fonction de paiement est la suivante :

$$g(x,y) = \begin{cases} x - y + xy & si \quad x < y \\ 0 & si \quad x = y \\ 1 - 2y & si \quad x > y \end{cases}$$

Puis on vérifie que les stratégies données forment bien un point-selle.

5) On ne peut pas raisonner par récurence dans le cadre d'un duel silencieux car une fois qu'une balle a été tirée, seul celui qui l'a tiré le sait.

**Exercice 2 :**

$\sup_s \inf_t f(s,t) = -1$, $\inf_t \sup_s f(s,t) = 0$.

On peut vérifier que $f$ est quasi-concave en $s$ et quasi-convexe et s.c.i. en $t$. Elle est aussi s.c.s. en $s$ pour tout $t$ sauf pour $t = 1$.

Il existe une valeur en mixte $(-\frac{1}{2})$. Il suffit que le joueur 1 joue uniforme sur $[0,1]$ (ou joue 0 avec probabilité $\frac{1}{2}$ et 1 avec probabilité $\frac{1}{2}$).

**Exercice 3 :**

1) On note $v = \inf_n v_n = \lim_n v_n$. Pour $n$ tel que $v_n \leq v + 1/n$, considérons $t_n$ une stratégie $1/n$-optimale du joueur 2 dans $G_n$. On a pour tout $s$ de $S$, $f(s,t_n) \leq f_n(s,t_n) \leq v_n + 1/n \leq v + 2/n$. On pose maintenant, pour tout $n$ :

$$A_n = \{s \in S, f_n(s,t) \geq v - 1/n \, \forall t \in T\}.$$

$A_n$ est une suite décroissante de compacts non vide. Il existe donc un élément dans $\cap_n A_n$, qui s'avère être une stratégie optimale pour le joueur 1 dans $G$.

2) Dans les deux cas, pour tout $n$ $v_n = 1$ et $v = 0$. Dans le premier cas $S$ n'est pas compact, dans le second $(f_n)_n$ n'est pas monotone.

**Exercice 4 :**

1) Soit $x = \inf_{\beta \in \mathcal{B}} \sup_{a \in A} g(a, \beta(a))$. Soit $\beta \in \mathcal{B}$ quelconque, puisque $\inf_{b \in B} g(a,b) \leq g(a, \beta(a))$ on déduit que $\underline{v} \leq x$. Inversement, puisque pour tout $\epsilon > 0$, et tout $a$, il existe $\beta(a)$ tel que : $g(a, \beta(a)) \leq \inf_b g(a,b) + \epsilon$, on déduit que $x \leq \underline{v}$.

2) Il suffit de remarquer que les $\alpha$ constantes sont dans la classe des fonctions continues.

3) C'est une conséquence de Brouwer. En effet, $f$ l'application de $A \times B$ vers lui

même qui associe à $(a,b)$, $f(a,b) = (\alpha(b), \beta(a))$ est définie sur un convexe-compact. Elle admet donc un point fixe $(a^*, b^*)$.

4) Soit $\alpha$, $\epsilon$-optimale pour $z = \sup_{\alpha \in \mathcal{A}_c} \inf_{b \in B} g(\alpha(b), b)$.

Soit $\beta$ $\epsilon$-optimal pour $t = \inf_{\beta \in \mathcal{B}_c} \sup_{a \in A} g(a, \beta(a))$.

Si $(a^*, b^*)$ est un point fixe de $f$ comme dans 3) alors $x - \epsilon \leq g(a^*, b^*) \leq y + \epsilon$. Ceci est vrai pour tout $\epsilon$, d'où $x \leq y$.

5) Le joueur 1 veut maximiser sa distance par rapport au joueur 2 et l'opposé pour le joueur 2. Donc $\underline{v} = 0$ (le joueur 2 joue $b = a$), $\overline{v} = \frac{1}{2}$ (le joueur 2 joue $\frac{1}{2}$ ce qui rend 1 indifférent entre réagir avec 0 ou 1). $\inf_{\beta \in \mathcal{B}_c} \sup_{a \in A} g(a, \beta(a)) = 0$ (il suffit de choisir $\beta(a) = a$). Enfin, $\sup_{\alpha \in \mathcal{A}_c} \inf_{b \in B} g(\alpha(b), b) = 0$ (il suffit de prendre $b$ un point fixe de $\alpha$).

## Feuille 4

**Exercice 1 :**

On note $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\sigma,\tau}$.

1) Soit $n \geq 1$ et $h_n$ dans $\mathcal{H}_n$ fixés. Que $\bar{g}_n$ soit dans $C$ ou pas, en date $n+1$ le joueur 1 va joueur $x_{n+1} \in \Delta(I)$ tel que pour tout $y$, $\langle x_{n+1}Ay - \Pi_C(\bar{g}_n), \bar{g}_n - \Pi_C(\bar{g}_n)\rangle \leq 0$.

On a :

$$\begin{aligned}
d_{n+1}^2 &\leq \|\bar{g}_{n+1} - \pi_C(\bar{g}_n)\|^2, \\
&\leq \|\frac{1}{n+1}\sum_{t=1}^{n+1} g_t - \pi_C(\bar{g}_n)\|^2, \\
&\leq \|\frac{1}{n+1}(g_{n+1} - \pi_C(\bar{g}_n)) + \frac{n}{n+1}(\bar{g}_n - \pi_C(\bar{g}_n))\|^2, \\
&\leq \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 \|g_{n+1} - \pi_C(\bar{g}_n)\|^2 + \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 {d_n}^2 + \frac{2n}{(n+1)^2} < g_{n+1} - \pi_C(\bar{g}_n), \bar{g}_n - \pi_C(\bar{g}_n) > .
\end{aligned}$$

Par hypothèse, l'espérance du produit scalaire ci-dessus est négatif, donc

$$\mathbf{E}\left(d_{n+1}^2 | h_n\right) \leq \frac{1}{(n+1)^2}\mathbf{E}\left(\|g_{n+1} - \pi_C(\bar{g}_n)\|^2 | h_n\right) + \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 {d_n}^2.$$

2) $\mathbf{E}\left( \langle g_{n+1} - \Pi_C(\bar{g}_n), \bar{g}_n - \Pi_C(\bar{g}_n)\rangle \, | h_n\right) \leq 0$, donc $\mathbf{E}\left(\|g_{n+1} - \pi_C(\bar{g}_n)\|^2 | h_n\right) \leq \mathbf{E}\left(\|g_{n+1} - \bar{g}_n\|^2 | h_n\right) \leq (2\|A\|_\infty)^2$.

3) On a alors :

$$\mathbf{E}\left(d_{n+1}^2 | h_n\right) \leq \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 {d_n}^2 + \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 4\|A\|_\infty^2.$$

En prenant l'espérance, on obtient : $\forall n \geq 1$, $\mathbf{E}\left(d_{n+1}^2\right) \leq (\frac{n}{n+1})^2 \mathbf{E}({d_n}^2) + (\frac{1}{n+1})^2 4\|A\|_\infty^2$. Donc on a par récurrence, pour tout $n \geq 1$, $\mathbf{E}(d_n^2) \leq \frac{4\|A\|_\infty^2}{n}$, puis $\mathbf{E}(d_n) \leq \frac{2\|A\|_\infty}{\sqrt{n}}$.

4) On pose $e_n = d_n^2 + \sum_{t=n+1}^{\infty} \frac{4\|A\|_\infty^2}{t^2}$. L'inégalité (2) donne : $\mathbf{E}(e_{n+1}|h_n) \leq e_n$, donc $(e_n)$ est une surmartingale positive dont l'espérance tend vers zéro. Donc $e_n \longrightarrow_{n\to\infty} 0$ $\mathbb{P}_{\sigma,\tau}$ p.s., et enfin $d_n \longrightarrow_{n\to\infty} 0$ $\mathbb{P}_{\sigma,\tau}$ p.s.

**Exercice 2 :**

1) Le théorème de Fubini ne s'applique pas.

**Exercice 3 :**

Soit $\mu$ la probabilité uniforme sur $[0, 1/2]$. La stratégie $1/3\ \mu + 2/3\ \delta_1$ du joueur 1 garantit $1/3$.

Soit $\sigma$ dans $\Delta(S)$ qui garantit au moins $1/3$. $f(\sigma, t) \geq 1/3\ \forall t$.
$t = 1$ donne $\sigma([0, 1/2[) - \sigma(]1/2, 1[) \geq 1/3$.
$t = \frac{1}{2}^-$ donne $-\sigma([0, 1/2[) + \sigma([1/2, 1]) \geq 1/3$.

On somme les inégalités : $\sigma(\{1/2\}) + \sigma(\{1\}) \geq 2/3$. Comme $\sigma([0, 1/2[) \geq 1/3$, on obtient : $\sigma([0, 1/2[) = 1/3$ et $\sigma(\{1/2\}) + \sigma(\{1\}) = 2/3$. Donc $f(\sigma, t = 1) = 1/3$, et $\sigma$ ne garantit pas plus que $1/3$.
D'où $\sup_\sigma \inf_\tau f(\sigma, \tau) = 1/3$.

Soit maintenant $\tau$ dans $\Delta(T)$ telle que : $\inf_s f(s, \tau) \leq 1/3 + \varepsilon$.
$s = 1$ donne $\tau(\{1\}) \geq 2/3 - \varepsilon$.
$s = 0$ donne $\tau(]1/2, 1]) - \tau(]0, 1/2[) \leq 1/3 + \varepsilon$, donc $\tau(]0, 1/2[) \geq 2/3 - \varepsilon - (1/3 + \varepsilon) = 1/3 - 2\varepsilon$.
$s = \frac{1}{2}^-$ donne $\tau(\{1\}) - \tau([1/2, 1[) + \tau([0, 1/2[) \leq 1/3 + \varepsilon$.
Donc $-1 + 2\tau(\{1\}) + 2\tau([0, 1/2[) \leq 1/3 + \varepsilon$, et $\tau(\{1\}) + \tau([0, 1/2[) \leq 2/3 + \varepsilon/2$.

On obtient alors $1 - 3\varepsilon \leq 2/3 + \varepsilon/2$, d' o ù $\varepsilon \geq 2/21$, et $1/3 + \varepsilon \geq 3/7$. Donc $\inf_\tau \sup_\sigma f(\sigma, \tau) \geq 3/7$, et $G$ n'a pas de valeur.

*Remarque :* on peut montrer que $\inf_\tau \sup_\sigma f(\sigma, \tau) = 3/7$, avec $\tau = 4/7\delta_1 + 2/7\delta_{1/2} + 1/7\delta_{1/4}$.

## Feuille 5

**Exercice 1 :**

1) Premier jeu : 3 équilibres $(H, D)$, $(B, G)$ et $(2/3H + 1/3B, 2/3G + 1/3D)$.

Second jeu : somme nulle, un équilibre $(0,7H + 0,3B, 1/2G + 1/2D)$.

Troisième jeu : $(H, D)$ et une infinité d'équilibres $(xH + (1 - x)B, G)$, avec $x \in [0, 1/2]$.

Quatrième jeu : 3 équilibres (commencer par éliminer $B$ et $d$ qui sont strictement dominées dans l'extension mixte)

Cinquième jeu : $(B, D, O)$, $(H, G, E)$ et $(1/2H+1/2B, 1/2G+1/2D, 1/2O+1/2E)$.

2) 1, -1/2 et 7/4.

**Exercice 2 :**

1) $N = \{1, ..., n\}$, $S_i = \mathbb{R}_+$ pour tout $i$, et $g_i(p_1, ..., p_n) = x_i \max(1 - \sum_j x_j, 0)$.

2) Soit $x = (x_1, ..., x_n)$ un équilibre de Nash. Pour $i$ dans $N$, on note $s_i = \sum_{j \neq i} x_j$ et $s = \sum_j x_j$.

Supposons qu'il existe $i$ tel que $s_i < 1$. Alors $x_i = (1 - s_i)/2$ car $x_i$ est BR contre $x_{-i}$. Alors $s < 1$, et donc pour tout $j$ on a $s_j < 1$ et $x_j = (1 - s_j)/2$. D' où $x_j + s = 1$ pour tout $j$, donc $x_1 = ... = x_n = 1/(n+1)$. On a bien un équilibre de Nash, le prix est $p = 1/(n+1)$, la pêche totale est $n/(n+1)$ et le revenu total est $n/(n+1)^2$.

Sinon, $s_i \geq 1$ pour tout $i$. On a d'autres équilibres de Nash, où le prix et les revenus sont nuls et la pêche est totale (*Remarque : on a supposé des coûts de production nuls.*)

3) $n/(n+1)^2 \leq 1/4$ et $n/(n+1) \geq 1/2$ pour tout $n \geq 1$.

**Exercice 3 :**

1) Dans l'extension mixte de $G$, le joueur 1 choisit une probabilité sur $A^1$ qui peut se représenter par un élément $a = p1 + (1-p)j$, avec $p \in [0, 1]$. L'ensemble des stratégies mixtes du joueur 1 est alors vu comme l'intervalle complexe $S^1 = [1, j] = \{p1 + (1-p)j, \ p \in [0, 1]\}$. De même, $S^2 = [j, j^2]$ et $S^3 = [j^2, 1]$. Notons $g^1(a, b, c)$ le paiement espéré du joueur 1 lorsque $a$, $b$ et $c$ sont jouées. $g^1$ est affine en chaque variable, et coïncide avec les paiements de $G$ lorsque les stratégies sont pures. Cette description caractérise $g^1$, on a donc la même formule $Re(abc)$. Idem pour $g^2$, $g^3 = 0$ est clair.

$$g^1(a, b, c) = Re(abc), \quad g^2(a, b, c) = Im(abc), \quad g^3(a, b, c) = 0.$$

2) non et non. Soit $F \subset \mathbb{R}^2$ la projection des paiements réalisables sur les paiements des joueurs 1 et 2. $F$ contient les segments $[1, j]$, $[j, j^2]$ et $[j^2, 1]$ mais comme $|abc| = |a||b||c| \geq 1/8 > 0$ pour tout $(a, b, c)$ de $S^1 \times S^2 \times S^3$, $0 \notin F$.

**Exercice 4 :**

A1) Soit $D = \{d_1, ..., d_n, ...\}$ dénombrable dense dans $\bar{A}$. On définit $\alpha_1 = d_1$ et

$\alpha_n = \sup\{\alpha_{n-1}, d_n\}$ pour tout $n$. On extrait une sous-suite $(\alpha_{\phi(n)})_n$ qui converge vers $\alpha \in S$. $\alpha$ majore $D$, donc aussi $\bar{D}$, et alors $\alpha$ majore $A$. Et tout majorant $\beta$ de $A$ majore $D$, donc vérifie $\beta \geq \alpha_n$ pour tout $n$, d' où $\beta \geq \alpha$. $\alpha = \sup A$. Pour $A = S$, on obtient $\sup S \in S$, donc $S$ a un plus grand élément (idem pour $\inf A$ et $\min S$).

A2) Posons $A = \{s \in S, f(s) \leq s\}$. $A \neq \emptyset$, car $A$ a un plus grand élément. Notons $a = \inf(A) \in S$, d'après la question $A1$. On a pour tout $s$ de $A$, $a \leq s$ donc comme $f$ est croissante, $f(a) \leq f(s) \leq s$, d'où $f(a)$ minore $A$, et $f(a) \leq a$. On utlise à nouveau la croissance de $f$ : $f(f(a)) \leq f(a)$, donc $f(a) \in A$. Comme $a$ minore $A$, $a \leq f(a)$, et finalement $a = f(a)$.

B1) Fixons $i$ et $s_{-i}$. $BR^i(s^{-i})$ est non vide et compact (car $S^i$ compact et $g^i$ s.c.s. en $s^i$). C'est un treillis par surmodularité de $g^i$.

B2) On suppose $s^{-i} \geq s'^{-i}$, et on considère $t'^i \in BR^i(s'^{-i})$. Il existe $x^i$ dans $BR^i(s^{-i})$. On a : $0 \geq g^i(x^i \vee t'^i, s^{-i}) - g^i(x^i, s^{-i}) \geq g^i(t'^i, s^{-i}) - g^i(x^i \wedge t'^i, s^{-i}) \geq g^i(t'^i, s'^{-i}) - g^i(x^i \wedge t'^i, s'^{-i}) \geq 0$. Donc on pose $t^i = x^i \vee t'^i$.

B3) Pour tout $s^{-i}$ dans $S^{-i}$, on définit $f^i(s^{-i})$ dans $S^i$ comme le plus grand élément de $BR^i(s^{-i})$ (voir A1). Puis on définit l'application ("de plus grande meilleure réponse") $f$ de $S = \prod_i S^i$ dans $S$ par $f(s) = (f^i(s^{-i}))_i$. $f$ est croissante par B2), et a un point fixe par A2). C'est un équilibre de Nash de $G$.

C) Poser $s^1 = q^1$ et $s^2 = -q^2$. Nouvelles fonctions de paiements : $u_1(s_1, s_2) = s_1 P_1(s_1, -s_2) - C_1(s_1)$, et $u_2(s_1, s_2) = -s_2 P_2(s_1, -s_2) - C_2(-s^2)$. On a $\partial u_1 / \partial s_1$ qui est croissante en $s_2$, donc si $s_1 \geq s'_1$, et $s_2 \geq s'_2$ :

$$\int_{s'_1}^{s_1} \partial_1 u_1(t_1, s_2) dt_1 \geq \int_{s'_1}^{s_1} \partial_1 u_1(t_1, s'_2) dt_1.$$

D'où $u_1(s_1, s_2) - u_1(s'_1, s_2) \geq u_1(s_1, s'_2) - u_1(s'_1, s'_2)$, et $u_1$ a des différences croissantes en $(s_1, s_2)$. Idem pour $u_2$ ($\partial u_2 / \partial s_2$ qui est croissante en $s_1$). On applique B3.

**Exercice 5 :**

Notons $x_1$, $x_2$, $x_3$, $y_1$, $y_2$ les probabilités respectives de $H$, $M$, $B$, $G$ et $D$.

- Si $\alpha < 0$, la stratégie $H$ est strictement dominée par $1/2M + 1/2B$, donc les équilibres du jeu sont ceux de

| | $G$ | $D$ |
|---|---|---|
| $M$ | $1, -1$ | $-1, 1$ |
| $B$ | $-1, 1$ | $1, -1$ |

. Il y a donc un seul équilibre : $(x = (0, 1/2, 1/2)$, $y = (1/2, 1/2))$.

- Si $\alpha = 0$, le jeu est à somme nulle. les deux joueurs garantissent 0, donc la valeur est zéro, et les stratégies optimales sont $y = (1/2, 1/2)$ pour le joueur 2 et $x = (1 - 2\alpha, \alpha, \alpha)$, avec $\alpha \in [0, 1/2]$ pour le joueur 1. Les équilibres sont les couples

de stratégies optimales $(x = (1-2\alpha, \alpha, \alpha), y = (1/2, 1/2))$ avec $\alpha \in [0, 1/2]$.

- Supposons $\alpha > 0$. Soit $(x = (x_1, x_2, x_3),\ y = (y_1, y_2))$ un équilibre. Si $x_2 > x_3$, alors comme le joueur 2 est en meilleure réponse on a $y_2 = 1$ et comme le joueur 1 est en meilleure réponse alors $x_2 = 0$, contradiction. De même $x_3 > x_2$ est impossible, donc on a forcément $x_3 = x_2$. Toute stratégie du joueur 2 contre $x$ donne un paiement nul au joueur 2, donc celui-ci est en meilleure réponse contre $x$. Comme le paiement du joueur 1 à l'équilibre est au moins $\alpha$ et que $\alpha > 0$, on a $x_2 = x_3 = 0$. Donc $x = (1, 0, 0)$, et il ne faut pas oublier d'écrire que $x$ est en meilleure réponse contre $y$. C'est le cas si et seulement si : $\alpha \geq y_1 - (1 - y_1) = 2y_1 - 1$, et $\alpha \geq 1 - 2y_1$, c'est-à-dire si et seulement si : $(1-\alpha)/2 \leq y_1 \leq (1+\alpha)/2$.

Si $\alpha > 0$, les équilibres sont donc les profils $(x = (1, 0, 0), y = (y_1, y_2))$, avec $(1-\alpha)/2 \leq y_1 \leq (1+\alpha)/2$. (Si $\alpha \geq 1$, on a donc tous les profils $(x = (1, 0, 0), y = (y_1, y_2))$)

**Exercice 6 :**

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} R_2 & B_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} R_1 \\ B_1 \end{array} & \begin{pmatrix} (0,0,0) & (0,1,0) \\ (1,0,0) & (0,0,1) \end{pmatrix} \\ & R_3 \end{array} \qquad \begin{array}{c} \begin{array}{cc} R_2 & B_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} (0,0,1) & (1,0,0) \\ (0,1,0) & (0,0,0) \end{pmatrix} \\ B_3 \end{array}$$

1) Les équilibres de Nash en stratégies pures sont obtenus quand 2 joueurs choisissent la même couleur, et le troisième l'autre couleur. Il y a donc 6 équilibres de Nash en stratégies pures.

2) Notons $x$, $y$, $z$ les probabilités respectives que les joueurs 1, 2 et 3 choisissent la couleur rouge.

Calculons la meilleure réponse du $J3$. En jouant $R_3$, son paiement est $(1-x)(1-y)$, en jouant $B_3$ son paiement est $xy$. On a $(1-x)(1-y) > xy$ ssi $x + y < 1$, donc : si $x+y < 1$, la meilleure réponse du joueur 3 est $z = 1$, si $x+y > 1$ la meilleure réponse du joueur 3 est $z = 0$, et si $x + y = 1$ tout $z$ est meilleure réponse pour le $J3$. Par symétrie, on obtient les meilleures réponses des joueurs 1 et 2.

Soit maintenant $(x, y, z)$ un équilibre de Nash. On a 6 équilibres purs par 1. On se restreint donc aux cas où $(x, y, z)$ n'est pas pur.

Supposons que deux joueurs au moins jouent une stratégie non pure, par exemple que $x \in ]0, 1[$ et $y \in ]0, 1[$. Alors comme le joueur 1 est indifférent, on a $y + z = 1$. De même, $x + z = 1$. Donc $x = y = 1 - z$, et donc $z \in ]0, 1[$. Le joueur 3 aussi est indifférent, et donc $x + y = 1$. On obtient $x = y = z = 1/2$, et c'est bien un équilibre de Nash.

Le dernier cas à considérer est quand un seul joueur joue une stratégie non pure. Alors les deux autres joueurs, qui jouent des stratégies pures, ne choisissent pas la même couleur. On obtient alors une infinité d'équilibres : les profils où un joueur choisit Rouge avec probabilité 1, un joueur choisit Blanc avec probabilité 1, et le troisième joueur joue une stratégie mixte.

## Feuille 6

**Exercice 1 :**

1) Clairement, $S(\tau) \subset S(\sigma)$ étant donné $g$.

Un élément $i$ dans $S(\sigma)$ minimise $\sum_j \tau_j \|x_i - y_j\|^2$. Or $\sum_j \tau_j \|x - y_j\|^2 = \sum_j \tau_j (\|x - z\|^2 + \|z - y_j\|^2 + 2 < x - z, z - y_j >) = \|x - z\|^2 + \sum_j \tau_j \|z - y_j\|^2$. Donc $S(\sigma) \subset \{i, x_i \text{ minimise } \|x_i - z\|^2\}$.

2.1) Soit $(\sigma_N, \tau_N)$ équilibre de $G_N$. Par 1, on a que $S(\sigma_N) \subset \{i, x_i \text{ minimise } \|x_i - x_{N+1}\|^2\}$. Comme $d(x_m, x_{N+1}) \leq 2\varepsilon$, on a pour $i$ dans $S(\sigma_N)$ : $d(x_i, x_{N+1}) \leq 2\varepsilon$ et donc $d(x_i, x^*) \leq 3\varepsilon$. idem pour $i$ dans $S(\tau_N)$, car $S(\tau_N) \subset S(\sigma_N)$. Comme $x_{N+1} = \sum_{i=1}^{N} \tau_N(i) y_i$, et que $y_i \in F(x_i)$ pour tout $i$, on a $x_{N+1} \in Co\{\cup_z F(z); z \in B(x^*, 3\varepsilon)\}$.

2.2) $F$ est de graphe compact, donc $F(B(x^*, 3\varepsilon))$ est compact, et $K_\varepsilon =_{def} Co\{\cup_z F(z); z \in B(x^*, 3\varepsilon)$ est compact. On a donc $x^* \in K_\varepsilon$, et ceci pour tout $\varepsilon > 0$.

Soit $x$ dans $\cap_{\varepsilon>0} K_\varepsilon$. Pour tout $n$, on peut (par Carathéodory) trouver $z_1^n, ..., z_{K+1}^n$ dans $B(x^*, 1/n)$ et écrire $x = \sum_{i=1}^{K+1} \lambda_i^n y_i^n$, avec $y_i^n \in F(z_i^n)$ pour tout $i$. On extrait des sous-suites convergentes, et comme le graphe de $F$ est fermé et que $F(x^*)$ est convexe, on trouve que $x \in F(x^*)$. Et donc $x^* \in F(x^*)$.

**Exercice 2 :**

1.1) Soit $\sigma$ fixé dans $\Sigma(\eta)$, pour tout $i$ on définit $\gamma(\sigma, t^i)$ comme le nombre de stratégies pures du joueur $i$ strictement meilleures que $t^i$ contre $\sigma^{-i}$. On définit alors $\tau$ tel que pour tout joueur $i$ et stratégie pure $s^i$,

$$\tau^i(s^i) = \frac{\varepsilon^{\gamma(\sigma, s^i)}}{\sum_{t^i \in S^i} \varepsilon^{\gamma(\sigma, t^i)}}.$$

$\tau$ est dans $F(\sigma)$.

1.2) Les hypothèses de Kakutani s'appliquent à $F$. On obtient un point fixe $\sigma_\varepsilon$ de $F$ qui est un équilibre $\varepsilon$-propre du jeu, et on peut considérer une valeur d'adhérence lorsque $\varepsilon \to 0$.

2) Jeu 1 : $(T, L)$ est un équilibre propre donc parfait donc Nash. $(B, R)$ est Nash mais pas parfait. Jeu 2 : $(T, L)$ est propre donc parfait donc Nash, $(M, M)$ est Nash,

parfait mais pas propre.

**Exercice 3 :**

1) Si $t$ est un équilibre de Nash alors pour tout $s$ et tout $i$, $G_i(s_i, t_{-i}) \leq G_i(t_i, t_{-i})$. En sommant sur $i$ on déduit que $\Phi(s,t) \leq \Phi(t,t)$. Inversement, supposons que $\Phi(s,t) \leq \Phi(t,t)$, $\forall s \in S$. En prenons $s$ de la forme $(s_i, t_{-i})$ on déduit que $G_i(s_i, t_{-i}) \leq G_i(t_i, t_{-i})$ pour tout $i$ et $s_i$ : $t$ est un équilibre de Nash.

2) On veut montrer l'existence d'un équilibre de Nash. Par l'absurde, on suppose que pour chaque $t$ il existe $s$ avec

$$\Phi(s,t) > \Phi(t,t).$$

2.1) Considérons la famille $(O_s = \{t \in S; \Phi(s,t) > \Phi(t,t)\})_{s \in S}$. Puisque $\sum_{i=1}^n G_i$ est continue, $t \to \Phi(t,t)$ est continue. Puisque $G_i(s_i, .)$ est continue sur $S_{-i}$ pour tout $s_i$, pour chaque $i$, $t \to \Phi(s,t)$ est continue. Par conséquent, $t \to \Phi(s,t) - \Phi(t,t)$ est continue et donc $O_s = \{t \in S; \Phi(s,t) > \Phi(t,t)\}$ est ouvert pour tout $s$. Aussi par hypothèse, tout $t$ est dans au moins un $s$. Nous avons bien un recouvrement de $S$ par des ouverts.
2.2) Puisque $S$ est compact, il peut être recouvert par une famille finie $\{O_{s^k}\}_{k \in K}$. Par conséquent, il existe $(s^k)_{k \in K}$ avec :

$$\forall t \in S, \ \max_{k \in K} \Phi(s^k, t) > \Phi(t,t).$$

2.3) Soit $\Theta$ définie par :

$$\Theta(t) = \frac{\sum_{k \in K} (\Phi(s^k,t) - \Phi(t,t))^+ s^k}{\sum_k (\Phi(s^k,t) - \Phi(t,t))^+} = \sum_{k \in K} \frac{(\Phi(s^k,t) - \Phi(t,t))^+}{\sum_l (\Phi(s^l,t) - \Phi(t,t))^+} s^k$$

C'est une application bien définie car pour tout $t$, il existe $k$ tel $\Phi(s^k,t) > \Phi(t,t)$ ce qui implique que $\sum_l (\Phi(s^l,t) - \Phi(t,t))^+ > 0$. Aussi, l'image de $t$ est une combinaison convexe des $s^k$. Puisque $S$ est convexe (comme produit de convexes), $\Theta(t)$ est dans $S$. Enfin, la continuité de l'application $t \to \Phi(s,t) - \Phi(t,t)$ assure que $\Theta(t)$ est continue. Le théorème de Brouwer implique l'existence d'un point fixe $t^*$ de $\Theta$.
2.4) Soit $t^* = \Theta(t^*)$. Alors $t^* = \sum_{k \in K} \lambda_k s^k$ avec $\lambda_k = \frac{(\Phi(s^k,t^*) - \Phi(t^*,t^*))^+}{\sum_l (\Phi(s^l,t^*) - \Phi(t^*,t^*))^+}$. Ainsi $\lambda_k > 0$ implique $\Phi(s^k, t^*) > \Phi(t^*, t^*)$. Puisque $G_i(., s_{-i})$ est concave sur $S_i$ pour tout $s_{-i}$ et chaque $i$, $s \to \Phi(s, t^*)$ est concave en $s$ (comme somme de fonctions concaves) et donc $\Phi(t^*, t^*) \geq \sum_k \lambda_k \Phi(s^k, t^*)$. Par conséquent, $\Phi(t^*, t^*) > \Phi(t^*, t^*)$ : une contradiction.

**Exercice 4 :**

1) Puisque $G$ est de potentiel $\Phi$, nous avons par définition $\forall i, \forall s^i, t^i \in S^i, \forall s^{-i} \in S^{-i}$

$$G^i(s^i, s^{-i}) - G^i(t^i, s^{-i}) = \Phi(s^i, s^{-i}) - \Phi(t^i, s^{-i}).$$

l'extension linéaire implique pour tout $\forall i, \forall \sigma^i, \tau^i \in \Sigma^i, \forall \sigma^{-i} \in \Sigma^{-i}$

$$G^i(\sigma^i, \sigma^{-i}) - G^i(\tau^i, \sigma^{-i}) = \Phi(\sigma^i, \sigma^{-i}) - \Phi(\tau^i, \sigma^{-i})$$

Fixons maintenant une $\tau^i \in \Sigma^i$ quelconque du joueur $i$ et un profil de stratégies $\sigma^{-i}$ quelconque des autres joueurs. Ainsi,

$$\begin{aligned} G^i(\sigma^i, \sigma^{-i}) &= \Phi(\sigma^i, \sigma^{-i}) + G^i(\tau^i, \sigma^{-i}) - \Phi(\tau^i, \sigma^{-i}) \\ &= \Phi(\sigma^i, \sigma^{-i}) + f(\tau^i, \sigma^{-i}) \end{aligned}$$

D'où $\sigma^i$ maximise $G^i(\sigma^i, \sigma^{-i})$ si et seulement s'il maximise $\Phi(\sigma^i, \sigma^{-i})$. Ainsi, $\sigma$ est un équilibre de Nash de $G$ si et seulement il est pour $\Phi$. Et puisque dans le jeu $\Phi$ les joueurs ont la même fonction objective, si $s \in \arg\max_{t \in S} \Phi(t)$ alors c'est un équilibre de Nash pur de $\Phi$ donc de $G$.

2) Le jeu

| | $b_1$ | $b_2$ |
|---|---|---|
| $a_1$ | $(2,2)$ | $(0,0)$ |
| $a_2$ | $(0,0)$ | $(1,1)$ |

est de potentiel car $G^1(\cdot) = G^2(\cdot)$.

Il a deux équilibre purs $(a_1, b_1)$ et $(a_2, b_2)$ et un équilibre mixte $\left(\frac{1}{3}a_1 \oplus \frac{2}{3}a_2; \frac{1}{3}b_1 \oplus \frac{2}{3}b_2\right)$ (ainsi un jeu de potentiel peut avoir plusieurs équilibres).

3) Dans le jeu de congestion on a d'un côté

$$G^i(m, s^{-i}) - G^i(n, s^{-i}) = u^m(1 + t^m(s^{-i})) - u^n(1 + t^n(s^{-i}))$$

et de l'autre côté :

$$\Phi(m, s^{-i}) - \Phi(n, s^{-i}) = \sum_k \sum_{r=1}^{t^k(m,s^{-i})} u^k(r) - \sum_k \sum_{r=1}^{t^k(n,s^{-i})} u^k(r)$$

Puisque $t^m(m, s^{-i}) = 1 + t^m(s^{-i})$ et pour $l \neq m$ on a $t^m(l, s^{-i}) = t^m(s^{-i})$ nous déduisons que,

$$\begin{aligned} \Phi(m, s^{-i}) - \Phi(n, s^{-i}) &= \sum_{r=1}^{t^m(m,s^{-i})} u^m(r) - \sum_{r=1}^{t^m(n,s^{-i})} u^m(r) + \sum_{r=1}^{t^n(m,s^{-i})} u^n(r) - \sum_{r=1}^{t^n(n,s^{-i})} u^n(r) \\ &= \sum_{r=1}^{1+t^m(s^{-i})} u^m(r) - \sum_{r=1}^{t^m(s^{-i})} u^m(r) + \sum_{r=1}^{t^n(s^{-i})} u^n(r) - \sum_{r=1}^{1+t^n(s^{-i})} u^n(r) \\ &= u^m(1 + t^m(s^{-i})) - u^n(1 + t^n(s^{-i})) \end{aligned}$$

Le jeu de congestion est bien un jeu de potentiel.

4) La dynamique du réplicateur est définie comme suit :

$$\dot{x}^i(s^i)(t) = x^i(s^i)(t)[G^i(s^i, x^{-i}(t)) - G^i(x(t))].$$

Puisque $G$ est un jeu de potentiel, nous avons que pour tout $\widetilde{s} \in S$ :

$$G^i(s^i, \widetilde{s}^{-i}) - G^i(\widetilde{s}) = \Phi(s^i, \widetilde{s}^{-i}) - \Phi(\widetilde{s})$$

d'où

$$\sum_{\widetilde{s}} x(\widetilde{s})(t)\left[G^i(s^i, \widetilde{s}^{-i}) - G^i(\widetilde{s})\right] = \sum_{\widetilde{s}} x(\widetilde{s})(t)\left[\Phi(s^i, \widetilde{s}^{-i}) - \Phi(\widetilde{s})\right]$$

et donc

$$G^i(s^i, x^{-i}(t)) - G^i(x(t)) = \Phi(s^i, x^{-i}(t)) - \Phi(x(t))$$

ainsi,

$$\dot{x}^i(s^i)(t) = x^i(s^i)(t)[\Phi(s^i, x^{-i}(t)) - \Phi(x(t))].$$

Posons maintenant $\phi(t) = \Phi(x(t))$, d'où

$$\begin{aligned}
\dot{\phi}(t) &= \frac{d}{dt}\left[\sum_s x(s)(t)\Phi(s)\right] \\
&= \frac{d}{dt}\left[\sum_{s=(s^1,\ldots,s^n)} \left(\prod_i x^i(s^i)(t)\right)\Phi(s)\right] \\
&= \sum_{s=(s^1,\ldots,s^n)} \sum_i \dot{x}^i(s^i)(t)\left(\prod_{j\neq i} x^j(s^j)(t)\right)\Phi(s) \\
&= \sum_i \sum_{s^i\in S^i} \dot{x}^i(s^i)(t) \sum_{s^{-i}\in S^{-i}} \left(\prod_{j\neq i} x^j(s^j)(t)\right)\Phi(s)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_i \sum_{s^i\in S^i} \dot{x}^i(s^i)(t)\Phi(s^i, x^{-i}(t)) \\
&= \sum_i \Phi(\dot{x}^i(t), x^{-i}(t))
\end{aligned}$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned}
&\sum_{s^i\in S^i} x^i(s^i)(t)[\Phi(s^i, x^{-i}(t)) - \Phi(x(t))]\Phi(x(t)) \\
=\ &[\sum_{s^i\in S^i} x^i(s^i)(t)\Phi(s^i, x^{-i}(t)) - \Phi(x(t))]\Phi(x(t)) \\
=\ &[\Phi(x(t)) - \Phi(x(t))]\Phi(x(t)) \\
=\ &0
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
\Phi(\dot{x}^i(t), x^{-i}(t)) &= \sum\nolimits_{s^i \in S^i} \dot{x}^i(s^i)(t)\Phi(s^i, x^{-i}(t)) \\
&= \sum\nolimits_{s^i \in S^i} x^i(s^i)(t)[\Phi(s^i, x^{-i}(t)) - \Phi(x(t))]\Phi(s^i, x^{-i}(t)) \\
&= \sum\nolimits_{s^i \in S^i} x^i(s^i)(t)[\Phi(s^i, x^{-i}(t)) - \Phi(x(t))]\,[\Phi(s^i, x^{-i}(t)) - \Phi(x(t))] \\
&= \sum\nolimits_{s^i \in S^i} x^i(s^i)(t)[\Phi(s^i, x^{-i}(t)) - \Phi(x(t))]^2
\end{aligned}$$

Conclusion : $\phi$ est croissante et puisqu'elle est bornée, elle converge. Donc $\dot{\phi}(t) \to 0$ (sinon $\phi$ divergerait). Cela implique que pour tout $i$ et $s^i$, $x^i(s^i)(t)[\Phi(s^i, x^{-i}(t)) - \Phi(x(t))]^2 \to 0$.

Deux cas sont maintenant à envisager : (1) si $\Phi(s^i, x^{-i}(t)) - \Phi(x(t))$ ne tend pas vers zéro à l'infini alors $x^i(s^i)(t) \to 0$. et donc aussi $\dot{x}^i(s^i)(t)$ et (2) si $\Phi(s^i, x^{-i}(t)) - \Phi(x(t)) \to 0$ alors

$$\dot{x}^i(s^i)(t) = x^i(s^i)(t)[\Phi(s^i, x^{-i}(t)) - \Phi(x(t))] \to 0$$

Donc $\dot{x}^i \to 0$ impliquant que $x(t)$ converge vers l'ensemble des points stationnaires de la dynamique du réplicateur qui sont atteints de l'intérieur. C'est points sont nécessairement des équilibres de Nash du jeu.

En effet, à la limite $x^i(s^i)(\infty)[\Phi(s^i, x^{-i}(\infty)) - \Phi(x(\infty))] = 0$, cela implique que :

a) si $s^i$ est dans le support de $x^i(\infty)$ ($x^i(s^i)(\infty) > 0$) alors son paiement est indépendant de la stratégie du support $\Phi(s^i, x^{-i}(\infty)) = \Phi(x(\infty))$,

b) si $s^i$ donne un paiement inférieur $\Phi(s^i, x^{-i}(\infty)) < \Phi(x(\infty))$ alors $x^i(s^i)(\infty) = 0$,

c) on ne peut pas avoir $\Phi(s^i, x^{-i}(\infty)) > \Phi(x(\infty))$ pour une certaine stratégie $s^i$ car sinon cela implique que pour tout $t$ grand $\dot{x}^i(s^i)(t) = x^i(s^i)(t)\Phi(s^i, x^{-i}(t)) - \Phi(x(t)) > 0$ montrant que $x^i(s^i)(\infty) > 0$ impliquant par (1) que $\Phi(s^i, x^{-i}(\infty)) = \Phi(x(\infty))$.

5) Pour la dynamique de meilleure réponse nous avons :

$$\begin{aligned}
\dot{\phi}(t) &= \sum\nolimits_i \Phi(\dot{x}^i(t), x^{-i}(t)) \\
&= \sum\nolimits_i \Phi(\dot{x}^i(t) + x^i(t) - x^i(t), x^{-i}(t))
\end{aligned}$$

par linéarité de $\Phi$ et puisque $\dot{x}^i(t) + x^i(t) \in MR^i[x^{-i}(t)]$ nous déduisons que :

$$\begin{aligned} \dot{\phi}(t) &= \sum_i \Phi(\dot{x}^i(t) + x^i(t), x^{-i}(t)) - \Phi(x^i(t), x^{-i}(t)) \\ &= \sum_i \left[F^i(x^{-i}(t)) - \Phi(x(t))\right] \end{aligned}$$

Puisque $F^i(x^{-i}(t)) - \Phi(x(t) \geq 0$, $\phi$ est croissante et puisqu'elle est bornée, elle converge nécessairement. Donc $\dot{\phi}(t) \to 0$, impliquant que pour tout $i$, $\Phi(x(t)) \to F^i(x^{-i}(t)) = \max_{s^i \in S^i} \Phi(s^i, x^{-i}(t))$. Ainsi, tout point d'accumulation $x(\infty)$ de cette dynamique est un point fixe de la correspondance de meilleure réponse et est donc un équilibre de Nash.

## Feuille 7

**Exercice 1 :**

1) Si le joueur 2 avait une stratégie gagnante, le joueur 1 pourrait l'imiter... Formellement, le jeu est à information parfaite donc il a une valeur en stratégie pures, ce qui revient à dire ici que l'un des joueurs a une stratégie gagnante. Supposons par contradiction que le joueur 2 possède une stratégie gagnante dans le jeu, et considérons le premier coup $(n, m)$ (en haut à droite) du joueur 1, alors le joueur 2 a une réponse gagnante. Or si le joueur 1 joue au premier coup cette réponse du joueur 2 il se retrouve dans la même position et donc lui-même dans une position gagnante, contradiction. Il est crucial de commencer par $(n, m)$ car sinon il se pourrait que la situation après le coup du joueur 2 ne puisse pas être générée par le joueur 1.
*Remarque :* Jouer $(n, m)$ revient ici à passer son tour pour le joueur 1.

2) Le joueur 1 commence par jouer la case (2,2). Il ne reste plus alors que des points sur les axes, formant deux côtés adjacents d'un carré... Chaque fois que le joueur 2 joue un point sur un axe, le joueur 1 joue le symétrique sur l'axe opposé, et ainsi de suite jusqu'à ce que le joueur 2 prenne $(1, 1)$.

3.1) Dans le cas $m = \infty$ et $n = 2$, c'est le joueur 2 qui a une stratégie gagnante. Si le joueur 1 commence par jouer $(1, y)$, on se retrouve dans le jeu $G(2, y - 1)$ et le joueur 2 peut gagner. Si le joueur 1 commence par jouer $(2, y)$, le joueur 2 répond $(1, y + 1)$ et ainsi de suite...

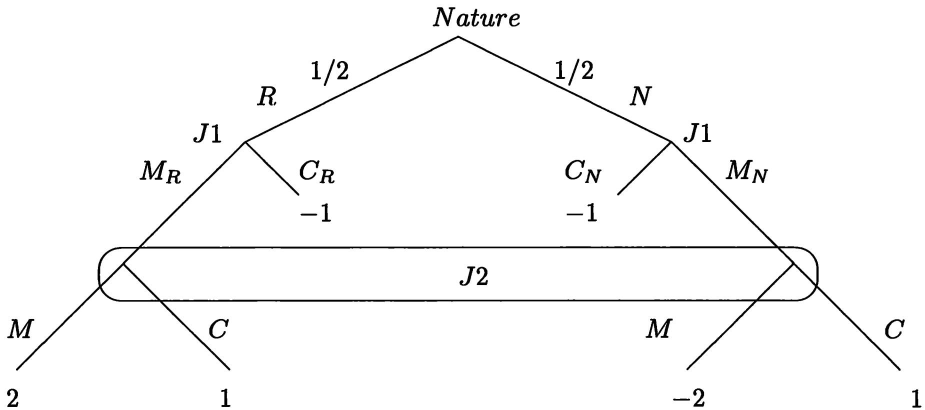
3.2) dans le cas $m = \infty$ et $n \geq 3$, le joueur 1 peut gagner en ramenant le jeu à $m = \infty$ et $n = 2$ (jouer la case (3,1)). Dans le cas où $n = m = \infty$, le joueur 1 peut gagner en commençant plus simplement par la case $(2, 2)$ comme dans b).

**Exercice 2 :**

Forme Normale :

| | $M$ | $C$ |
|---|---|---|
| $(M_R, M_N)$ | 0 | 1 |
| $(M_R, C_N)$ | 1/2 | 0 |
| $(C_R, M_N)$ | −3/2 | 0 |
| $(C_R, C_N)$ | −1 | −1 |

Forme extensive :




La valeur est 1/3. Le joueur 1 a une unique stratégie optimale : $1/3(M_R, M_N) + 2/3(M_R, C_N)$ qui correspond à toujours miser si Rouge, et bluffer 1/3 du temps si Noir. Le joueur 2 a une unique stratégie optimale $2/3M + 1/3C$, qui correspond à aller voir le jeu de son adversaire 2/3 du temps.

**Exercice 3 :**

1) 2 joueurs, le joueur i fixe $b_i$ dans $[0, +\infty[$. Son paiement est $v_i - b_{-i}$ si $b_i > b_{-i}$, $-b_i$ si $b_i < b_{-i}$, et en cas d'égalité, le paiement du joueur 1 est $v_1 - b_1$, et celui du joueur 2 $-b_2$.

2) Il y a toujours un vainqueur et un perdant. Si $b_1 > 0$ et $b_2 > 0$, alors le perdant va payer sa mise qui est strictement positive, il a intérêt à miser 0.

3) Si $b_1 = 0$ et $b_2 = 0$, alors l'un des deux a interêt à miser n'importe quoi et remporter l'enchère, et payer 0 (enchère du perdant).

4) Si $b_i = 0$ et $b_j > 0$. Le joueur $i$ va participer à l'enchère si son paiement devient strictement positif. Comme il devra payer $b_j$, son paiement sera strictement positif si $v_i > b_j$.

5) Si $b_i = 0$ et $b_j \geq v_i$, alors le joueur j remporte l'enchère, et paye 0, aucune déviation profitable pour lui. Quant au perdant, s'il dévie, c'est pour gagner (car s'il reste perdant, il devra payer sa mise, mieux vaut miser 0). Mais pour gagner il faut miser plus que $b_j$ et donc plus que $v_i$, ce qui signifie avoir un paiement négatif ou nul. Pas de déviation profitable pour le perdant non plus. Tout point de cette forme est un équilibre de Nash, et ce sont les seuls d'après 2 et 4. Le gagnant peut être 1 ou 2, donc pas nécessairement celui qui accorde le plus de valeur à l'objet, et il paye 0 pour remporter l'objet.

**Exercice 4 :**

1) Utilité de l'acheteur $[v - (b_1 + b_2)/2]\, 1_{b_1 \leq b_2}$ et du vendeur $[(b_1 + b_2)/2 - c]\, 1_{b_1 \leq b_2}$.

2) L'acheteur minimise $b_2$ et le vendeur maximise $b_1$ en gardant $b_1 \leq b_2$. A l'equilibre $b_1 = b_2$. $\forall b \in [c, v]$, $b = b_1 = b_2$ est un équilibre.

3) Montrons que les $b_i(\cdot)$ sont croissantes :

On pose $\pi_{b_2}(v) = E\left[[v - (b_1(c) + b_2)/2]\, 1_{b_1(c) \leq b_2}\right]$. $\pi_{b_2}(v+\varepsilon) = \pi_{b_2}(v) + \varepsilon P(b_2 \geq b_1(c))$. Notons $b_2(v) = \arg\max_{b_2} \pi_{b_2}(v)$. Alors $\pi_{b_2(v)}(v + \varepsilon) = \pi_{b_2(v)}(v) + \varepsilon P(b_2(v) \geq b_1(c))$. En $b_2 < b_2(v)$, le premier terme est inférieur car on s'écarte de l'optimum, et le deuxième terme est inférieur car on a abaissé la borne. L'optimum de $b_2 \to \pi_{b_2}(v + \varepsilon)$ est nécessairement à droite de $b_2(v)$, c'est à dire $b_2(v + \varepsilon) > b_2(v)$.

4) En supposant les fonctions d'enchères $\beta_1$, $\beta_2$ strictement croissantes et $C^1$, il faut commencer par écrire que pour chaque $c$, $\beta_1(c)$ maximise le paiement espéré :

$$\int_{\beta_2^{-1}(\beta_1(c))}^{1} \left(\frac{\beta_1(c) + \beta_2(v)}{2} - c\right) dv$$

La condition de premier ordre (en dérivant l'expression précédente par rapport à $\beta_1(c)$) donne :

$$\frac{1}{2}(1 - \beta_2^{-1}(\beta_1(c))) - d\beta_2^{-1}(\beta_1(c))(\beta_1(c) - c) = 0$$

Pour le joueur 2, $\beta_2(v)$ maximise le paiement espéré :

$$\int_0^{\beta_1^{-1}(\beta_2(v))} \left(v - \frac{\beta_1(c) + \beta_2(v)}{2}\right) dc$$

et la CPI donne

$$-\frac{1}{2}\beta_1^{-1}(\beta_2(v))) + d\beta_1^{-1}(\beta_2(v))(v - \beta_2(v)) = 0$$

Les 2 CPI sont les 2 équations différentielles cherchées. Si on cherche des solutions linéaires, on reporte et on trouve

$$\beta_1 = \frac{2}{3}c + \frac{1}{4}$$

et

$$\beta_2 = \frac{2}{3}v + \frac{1}{12}$$

Il y a échange si $v - c \geq 1/4$.

*Remarque* : cet exercice est à rapprocher du théorème de Myerson-Satterthwaite, au sens où l'enchère double n'est pas ex-post efficiente (il arrive qu'il n'y ait pas échange alors que $v > c$).

**Exercice 5 :**

1) On a les deux équilibres purs UL et DR, ainsi que l'équilibre complètement mixte $x = y = 1/2$, avec pour paiement $(5/2, 5/2)$.

2) Prenons le cas du joueur ligne. Si le résultat est PILE, il sait que le joueur colonne joue L, si bien que sa meilleure réponse est de jouer U, c'est ce que lui dicte la stratégie. De même, si le résultat est FACE, face à la décision R, la meilleure réponse est D. Il en va de même pour le joueur colonne. Le contrat est respecté.

3) Le paiement d'équilibre est $(3, 3)$. Noter que le paiement a été amélioré.

4) En fait, il est possible d'atteindre tout paiement compris dans l'enveloppe convexe des équilibres de Nash purs. Il suffit de considérer un pièce pour laquelle PILE apparaît avec probabilité $p$, pour $p \in [0, 1]$.

5) Nous allons faire l'étude pour le joueur ligne, il en va de même pour le joueur colonne. Si $\{A\}$ est observé, le joueur colonne va jouer $L$, il est donc optimal de joueur U et c'est ce que prescrit l'accord. Si $\{B, C\}$ est observé, le joueur ligne sait que la variable aléatoire vaut B ou C. La probabilité de chacune de ces possibilité est $1/2$. Si c'est B, alors le joueur colonne joue L et si c'est C, il joue R (chacune de ces stratégies est jouée avec probabilité $1/2$). Le joueur ligne est donc face au jeu :

| | 1/2L+1/2R |
|---|---|
| U | 5/2 |
| D | 5/2 |

Il est donc indifférent entre U et D, et il n'y a donc pas de déviation profitable par rapport à l'accord qui lui prescrit de jouer D.

6) Les trois issues possibles et équiprobables sont : A (UL), B (DL) et C (DR). Le paiement espéré est donc : $(3 + 1/3, 3 + 1/3)$. Ce paiement n'est pas une combinaison

convexe de $(5,1)$ et $(1,5)$. Il n'appartient pas à l'enveloppe convexe des équilibres de Nash purs. Noter que le paiement a encore été amélioré.

**Exercice 6 :**

1) Le joueur 1 garde tout et offre $x = 0$ à l'autre joueur. En effet, puisque l'autre joueur accepte toute offre $x > 0$, l'unique meilleure réponse du joueur 1 est de tout garder.

2) Soit $a_n(s)$ le paiement d''équilibre sous jeu parfait du joueur qui commence dans le jeu de somme initiale $s$ qui dure $n$ étapes (on peut montrer par récurrence que l'équilibre sous-jeu parfait est unique et donc que $a_n(s)$ est bien défini). C'est une fonction homogène en $s$. On a vu que $a_1(s) = s$ pour tout $s \geq 0$. Aussi, à l'équilibre on devrait avoir $a_2(100) = 100 - a_1(50)$ : cette équation veut dire que le joueur 1 (qui commence) doit offrir au joueur 2 ce qu'il peut obtenir par lui même après (sinon celui-ci refuse). Ainsi $a_3(100) = 100 - a_2(50) = 100 - a_2(0.5 \times 100) = 100 - 0.5a_2(100) = 75$. Donc, $a_n(100) = 100 - 0.5\ a_{n-1}(100)$. On déduit donc que $a_n(100)$ converge vers la solution de $a = 100 - 0.5\ a$ soit, $\frac{200}{3}$.

3) Il assez facile de prouver que c'est un équilibre sous jeu parfait, montrons l'unicité. Notons $A(s) \subset \mathbb{R}^2$ l'ensemble des paiements d'équilibre sous-jeux parfait lorsque le joueur 1 commence à proposer et que la somme vaut $s$, notons $\bar{a}(s)$ (resp. $\underline{a}(s)$) le supremum (resp. l'infimum) des premières coordonnées de $A(s)$. On a $0 \leq \underline{a}(s) \leq \bar{a}(s) \leq s$, et $\bar{a}(s) \geq s/(1+\delta)$. Dans un équilibre sous-jeu parfait, si à la première étape le joueur 1 propose un partage $(ts,(1-t)s)$ pour une proportion $t \in [0,1]$, le joueur 2 acceptera si $(1-t)s > \bar{a}(s\delta)$, soit $t < 1 - \bar{a}(s\delta)/s$, et refusera si $(1-t)s < \underline{a}(s\delta)$, soit pour $t > 1 - \underline{a}(s\delta)/s$. Le joueur 1 gagnera donc au moins $s(1 - \bar{a}(s\delta)/s)$, donc

$$\underline{a}(s) \geq s - \bar{a}(s\delta).$$

De même, dans un équilibre sous-jeu parfait, le joueur 1 gagnera au plus $s(1-\underline{a}(s\delta)/s)$ si le joueur 2 accepte la proposition d'étape 1, et si le joueur 2 refuse la proposition d'étape 1 c'est pire pour le joueur 1 (qui ne peut alors espérer au plus que $s\delta - \underline{a}(s\delta)$ en acceptant à l'étape 2 la proposition du joueur 2). Bref, on obtient :

$$\bar{a}(s) \leq s - \underline{a}(s\delta).$$

En combinant les 2 inégalités, on trouve $\bar{a}(s) \leq s-(s\delta-\bar{a}(s\delta^2)) \leq s(1-\delta)+s\delta^2(1-\delta)+\bar{a}(s\delta^4) \leq .... \leq s/(1+\delta)$. Donc $\bar{a}(s) = s/(1+\delta)$. Et du coup $\underline{a}(s) \geq s-(s\delta)/(1+\delta)$, on obtient $\underline{a}(s) = \bar{a}(s) = s/(1+\delta)$, le paiement d'équilibre sous-jeu parfait du joueur 1 est unique. On en déduit que dans tout équilibre sous-jeu parfait le joueur 1 proposera

la proportion $t = 1/(1+\delta)$, soit le partage $(s/(1+\delta), \delta s/(1+\delta))$ à la première étape, et le joueur 2 acceptera.

*Remarque :* par rapport à 2), noter que si $\delta = 1/2$, alors $1/(1+\delta) = 2/3$.

**Exercice 7 :**

1) Soit $\sigma$ un équilibre en stratégies pures de $G$. Montrons que $\sigma$ est aussi un équilibre dans $G'$. Puisque $\sigma$ est pure, il recommande un unique choix dans chaque ensemble d'information et engendre une unique partie. Pour vérifier que $\sigma$ est un équilibre dans $G'$, il suffit de tester que dans tout ensemble d'information atteint par $\sigma$, aucun joueur n'a intérêt à dévier. Soit $I'$ un ensemble d'information dans $G'$ coupé par $\sigma$. Si le joueur qui y joue a une déviation profitable, elle le serait aussi dans $G$, une contradiction.

2) Ce résultat est faux si $\sigma$ est mixte. Il suffit de considérer le jeu à somme nulle Pile et Face sous forme extensive. Le joueur I commence et a le choix entre Pile et Face, puis, sans connaître le choix de J1, le joueur 2 a le choix entre Pile et Face. Si le joueur 2 a bien deviné le choix de J1, J1 lui paye 1, sinon J2 paye 1 à J1. L'unique équilibre est mixte. Le joueur 1 joue $(1/2P, 1/2F)$ à l'étape 1 et de même pour le joueur 2 à l'étape 2. Si le joueur 2 connaît le choix de J1, sa meilleure réponse change : s'il observe P il joue P, s'il observe F il joue F.

3) C'est faux s'il y a le joueur hasard. Il suffit de reprendre l'exemple précédent en supposant que le joueur 1 est le joueur hasard et qu'il joue selon la distribution $(3/4P, 1/4F)$. Le joueur 2 gagne 1 s'il devine la pièce et perd 1 sinon. Sa meilleure réponse s'il ne connait pas le choix de la chance est la stratégie pure $P$ (car P a plus de chance de se réaliser). S'il connaît le résultat de la chance avant de jouer, sa meilleure réponse est de répliquer comme dans 2).

**Exercice 8 :**

1) Analysons ce jeu en partant de la fin du jeu (induction amont).

S'il y a seulement un, deux ou trois jetons, le joueur qui s'apprête à jouer gagne en prenant tous les jetons restants.

S'il reste quatre jetons, alors le joueur qui va jouer peut laisser un, deux ou trois jetons, et son adversaire sera capable de gagner, il aura une stratégie gagnante. Avec 5, 6 ou 7 jetons restants, le joueur qui s'apprête à jouer peut gagner en amenant le jeu à la position précédente, c'est-à-dire 4 jetons restants. Avec 8 jetons, le joueur qui s'apprête à jouer peut laisser 5, 6 ou 7 jetons, et donc il donne à son adversaire l'occasion de gagner. Nous voyons donc que les positions avec 0, 4, 8, 12, ... jetons

sont des cibles ; si un joueur arrive à attendre un multiple de 4, il a une stratégie gagnante.

Considérons maintenant le jeu avec 21 jetons. 21 n'est pas divisible par 4, le premier joueur peut donc gagner. Son action "gagnante" au premier stade du jeu est d'ôter un jeton et d'en laisser donc 20. A partir de là il contrôle le jeu car il peut laisser à chaque fois un multiple de 4 à son adversaire.
Sa stratégie optimale est unique car si jamais à un moment donné il ne laisse pas un multiple de 4 à son adversaire alors ce dernier a une stratégie gagnante.

2) Quelque soit le nombre initial de jetons $n$, si $n$ est non divisible par 4, le joueur I a une stratégie gagnante, sinon c'est le joueur 2 qui gagne.

**Exercice 9 :**

2)

| | E | D |
|---|---|---|
| RR | 2,2 | 4,0 |
| RS | 4,0 | 2,2 |
| SR | -2,6 | 2,2 |
| SS | 0,4 | 0,4 |

3) SR et SS sont strictement dominées. L'équilibre qui reste est complètement mixte $(1/2, 1/2)$ pour chacun des joueurs.

## Feuille 8

**Exercice 1 :**

1) Forme Normale :

| | $(N_N, N_B)$ | $(N_N, B_B)$ | $(B_N, N_B)$ | $(B_N, B_B)$ |
|---|---|---|---|---|
| $N$ | $(2,2)$ | $(2,2)$ | $(5/2,5/2)$ | $(5/2,5/2)$ |
| $B$ | $(5/2,5/2)$ | $(2,2)$ | $(5/2,5/2)$ | $(2,2)$ |

Tout équilibre donne au joueur 2 le paiement $5/2$, donc aux deux joueurs le paiement $(5/2, 5/2)$.

2) Forme Normale :

| | $(N_N, N_B)$ | $(N_N, B_B)$ | $(B_N, N_B)$ | $(B_N, B_B)$ |
|---|---|---|---|---|
| $(N_N, N_B)$ | $(2,2)$ | $(2,2)$ | $(5/2,5/2)$ | $(5/2,5/2)$ |
| $(N_N, B_B)$ | $(7/2,1)$ | $(2,2)$ | $(5,0)$ | $(7/2,1)$ |
| $(B_N, N_B)$ | $(1,7/2)$ | $(2,2)$ | $(0,5)$ | $(1,7/2)$ |
| $(B_N, B_B)$ | $(5/2,5/2)$ | $(2,2)$ | $(5/2,5/2)$ | $(2,2)$ |

Dans tout équilibre pur ou mixte le joueur 2 jouera $(N_N, B_B)$, donc l'unique paiement d'équilibre est $(2,2)$.

3) Lorsque les 2 joueurs sont informés, le seul paiement d'équilibre est $(2,2)$. Lorsque seul le joueur 2 est informé, le seul paiement d'équilibre est $(1,7/2)$.

4) La meilleure variante est la première, on peut donc dire que la valeur de l'information est négative ici (mais soulignons le fait que dans ces modèles, à chaque fois qu'un joueur est plus informé, l'autre joueur le sait).

**Exercice 2 :**

2) La forme normale du jeu est la suivante :

| | $G_A$ $G_B$ | $G_A$ $M_B$ | $G_A$ $D_B$ | $M_A$ $G_B$ | $M_A$ $M_B$ | $M_A$ $D_B$ | $D_A$ $G_B$ | $D_A$ $M_B$ | $D_A$ $D_B$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ $A_2$ | $(0,3)$ | $(0,3)$ | $(0,3)$ | $(2,5)$ | $(2,5)$ | $(2,5)$ | $(1,6)_*$ | $(1,6)$ | $(1,6)_*$ |
| $A_1$ $B_2$ | $(0,3)$ | $(1,11/2)$ | $(1,9)_*$ | $(1,5/2)$ | $(2,5)$ | $(2,17/2)$ | $(0,0)$ | $(1,5/2)$ | $(1,6)$ |
| $B_1$ $A_2$ | $(0,3)$ | $(1,5/2)$ | $(0,0)$ | $(2,5)$ | $(2,5)$ | $(2,17/2)$ | $(1,9)_*$ | $(2,17/2)$ | $(1,6)$ |
| $B_1$ $B_2$ | $(0,3)$ | $(2,5)$ | $(1,6)_*$ | $(0,3)$ | $(2,5)$ | $(1,6)$ | $(0,3)$ | $(2,5)$ | $(1,6)_*$ |

Les équilibres de Nash purs sont indiqués d'une étoile. Ils donnent tous un paiement de 1) au joueur 1. Les équilibres où le joueur 1 joue $(A_1, A_2)$ ou $(B_1, B_2)$ sont dits non révélateurs, car le joueur 1 envoie le même message quel que soit l'état, et donc ne révèle rien au joueur 2 sur celui-ci. Par contre, les équilibres où le joueur 1 joue $(A_1, B_2)$ ou $(B_1, A_2)$ sont dits complètement révélateurs car le joueur 2 peut déduire l'état du message du joueur 1.

*Remarque :* Dans ce type de jeu sender-receiver, il existe toujours un équilibre

non révélateur, mais pas forcément d'équilibre complètement révélateur. Les équilibres complètement révélateurs, quand ils existent, donnent les meilleurs paiements au joueur 2.

3) Le couple de stratégies suggérées correspond à l'équilibre mixte $(1/2(A_1, A_2) + 1/2(A_1, B_2), (M_A, D_B))$. Son paiement est $(2, 27/4)$, donc le paiement de joueur 1 est meilleur qu'aux équilibres purs. Dans cet équilibre, le joueur 2 apprend l'état s'il observe le message $B$ mais pas s'il observe le signal $A$ (sa croyance sur l'état passe alors de $1/2A + 1/2B$ à $2/3A + 1/3B$, on parle de révélation partielle d'information). Ici le joueur 1 a intérêt à révéler partiellement son information plutôt que complètement ou pas du tout.

**Exercice 3 :**

A) Par contradiction, soit $((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3))$ un équilibre de Nash mixte. Si $y_1 > 0$, alors $x_1 = 0$ et donc $y_3 = 0$. Si de plus $y_2 > 0$, alors $x_2 = 1 = y_1$, d'où une contradiction. Donc dans tout équilibre de Nash $y_1 = 0$, et donc $x_3 = 0$. Si $x_2 > 0$, $y_2 = 1$ non. Si $x_2 = 0$, on a $x_1 = 1$ et on trouve aussi une contradiction.

B1) On ne peut avoir d'équilibre de Nash pur $(s_i)_i$, car que vaudrait $\sum_i s_i$?

B2) Par contradiction, soit un équilibre de Nash mixte induisant les variables aléatoires *indépendantes* $s_1$, $s_2$,..., $s_n$,... Par le lemme de Borel-Cantelli, la probabilité que $\sum_i s_i = \infty$ est 0 ou 1. Les 2 cas sont impossibles.

B3) Soit $i$ un joueur, notons $s_i$ sa recommandation. Un rapide calcul montre que $P(\mu_1|s_i = 1) = P(\mu_2|s_i = 1) = P(\mu_1|s_i = 0) = P(\mu_2|s_i = 0) = 1/2$, donc le joueur $i$ est indifférent entre ses 2 actions et donc en meilleure réponse dans tous les cas.

**Exercice 4 :**

1) C'est un jeu à somme nulle fini.

2) Si $Q \in \Delta(S)$ est une stratégie du joueur 1 qui garantit 0 dans $\Gamma$, alors $Q$ est une distribution d'équilibre corrélé de $G$.

3) On a

$$\gamma(\mu, \pi) = \sum_{(s^1,s^2)\in S^1\times S^2} \mu^1(s^1)\mu^2(s^2) \sum_{i=1,2} \sum_{(t^i,u^i)\in L^i} \pi(t^i, u^i)\gamma((s^1, s^2); t^i, u^i).$$

Notons $A_1$ le terme correspondant à $i = 1$.

$$\begin{aligned} A_1 &= \sum_{s^1,s^2} \mu^1(s^1)\mu^2(s^2) \sum_{(t^1,u^1)} \pi(t^1,u^1)\gamma((s^1,s^2);t^1,u^1) \\ &= \sum_{s^1} \mu^1(s^1) \sum_{u^1} \pi(s^1,u^1) \sum_{s^2} \mu^2(s^2)\gamma((s^1,s^2);s^1,u^1) \\ &= \sum_{s^1} \mu^1(s^1) \sum_{u^1 \neq s^1} \rho^1(s^1,u^1) \sum_{s^2} \mu^2(s^2)(g^1(s^1,s^2) - g^1(u^1,s^2)) \\ &= \sum_{s^1} \mu^1(s^1) \sum_{u^1} \rho^1(s^1,u^1)(g^1(s^1,\mu^2) - g^1(u^1,\mu^2)) \\ &= \sum_{s^1,u^1} \mu^1(s^1)\rho^1(s^1,u^1)g^1(s^1,\mu^2) - \sum_{s^1,u^1} \mu^1(s^1)\rho^1(s^1,u^1)g^1(u^1,\mu^2) \\ &= \sum_{s^1} \mu^1(s^1)g^1(s^1,\mu^2) - \sum_{u_1} \mu^1(u^1)g^1(u^1,\mu^2) \\ &= g^1(\mu^1,\mu^2) - g^1(\mu^1,\mu^2) = 0 \end{aligned}$$

De même $A_2 = 0$, donc $\gamma(\mu,\pi) = 0$.

4) $\forall \pi \in \Delta(L), \exists \mu \in \Delta(S)$ t.q. $\gamma(\mu,\pi) \geq 0$, donc la valeur de $\Gamma$ est positive et on peut appliquer a) et b).

5) Dans le jeu auxiliaire à somme nulle $\Gamma$, l'espace de stratégies du joueur 1 est $S = S^1 \times S^2 \times \ldots \times S^n$, celui du joueur 2 est $\cup_{i=1}^n (S^i \times S^i)$, et les paiements sont similaires.

**Exercice 5 :**

1.1) Soit $\pi$ une DEC. On a :

$$\begin{aligned} G^1(\pi) &= \textstyle\sum_{s^1 \in S^1} \sum_{s^2 \in S^2} G^1(s^1,s^2)\pi(s^1,s^2) \\ &= \textstyle\sum_{s^1 \in S^1} \max_{t^1 \in S^1} \sum_{s^2 \in S^2} G^1(t^1,s^2)\pi(s^1,s^2) \\ &= \textstyle\sum_{s^1 \in S^1} \pi(s^1) \max_{t^1 \in S^1} G^1(t^1,\pi(.|s^1)). \end{aligned}$$

Or $\max_{t^1 \in S^1} G^1(t^1,\pi(.|s^1)) \geq v$ pour tout $s^1$, et donc $G^1(\pi) \geq v$. Par symétrie, on a aussi $G^2(\pi) \geq -v$, et comme $G^1(\pi) = -G^2(\pi)$, le paiement $(G^1(\pi), G^2(\pi))$ vaut $(v,-v)$.

1.2) Soit $\pi$ une DEC de $A$, et $s^1$ une stratégie pure du joueur 1 qui a une probabilité strictement positive sous $\pi$.

On a $v = G^1(\pi) = \sum_{s^1 \in S^1} \pi(s^1) \max_{t^1 \in S^1} G^1(t^1,\pi(.|s^1))$, avec $\max_{t^1 \in S^1} G^1(t^1,\pi(.|s^1)) \geq v$ pour tout $s^1$. Donc si $\pi(s^1) > 0$, on a $\max_{t^1 \in S^1} G^1(t^1,\pi(.|s^1)) = v$, ce qui signifie que $\pi(.|s^1)$ est une stratégie optimale du J2 dans $A$.

2.1) Si le joueur 1 reçoit le signal $a_1$, sa probabilité conditionnelle sur le signal du joueur 2 est $\pi(.|a_1) = 1/2b_1 + 1/2b_2$, et jouer $a_1$ est bien une meilleure réponse contre $1/2b_1 + 1/2b_2$. Si le joueur 1 reçoit le signal $a_2$, il en déduit que le signal du joueur 2 est $b_1$, et jouer $a_2$ est bien une meilleure réponse contre $b_1$. Par symétrie, le joueur 2 aussi a intérêt à jouer le signal qui lui est recommandé, et la distribution indiquée est

bien une DEC.

2.2) Une probabilité produit $\pi$ doit vérifier : $\pi(a_1, b_1)\pi(a_2, b_2) = \pi(a_1, b_2)\pi(a_2, b_1)$. Or ce n'est pas le cas ici, donc la réponse est non.

2.3) Il est facile de voir que la valeur est ici 0, et que les stratégies optimales des joueurs sont : $\alpha a_1 + (1 - \alpha)a_2$, avec $\alpha \geq 1/2$ pour le joueur 1, et symétriquement $\beta b_1 + (1 - \beta)b_2$, avec $\beta \geq 1/2$ pour le joueur 2. Soit maintenant $\pi$ une DEC dans ce jeu.

Pour toute action $a$ du joueur 1, si $\pi(a) > 0$ on a, par la question 1.2) , $\pi(b_3|a) = 0$ et $\pi(b_1|a) \geq \pi(b_2|a)$.

Donc $\pi(b_3) = 0$, et par symétrie $\pi(a_3) = 0$. $\pi$ s'écrit alors :

| | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ |
|---|---|---|---|
| $a_1$ | $x$ | $y$ | 0 |
| $a_2$ | $z$ | $t$ | 0 |
| $a_3$ | 0 | 0 | 0 |

avec $x \geq y$, $z \geq t$, $x \geq z$ et $y \geq t$.

Réciproquement, on vérifie que toute distribution du type ci-dessus est une DEC.

**Exercice 6 :**

1) Les équilibres de Nash sont $\alpha = (H, G)$, $\beta = (B, D)$ et $\gamma = (\frac{1}{2}H + \frac{1}{2}B, \frac{1}{2}G + \frac{1}{2}D)$.

2.1) Les paiements des joueurs 1 et 2 ne dépendent pas de ce que fait le joueur 3. Si $J1$ et $J2$ jouent selon $\alpha$ ou $\beta$, le joueur 3 n'a pas de suprémum (il devrait jouer à l'infini). J1 et J2 jouent donc selon $\gamma$, mais le même problème se pose (la matrice du milieu lui donne 4 en moyenne et les deux autres peuvent lui rapporter strictement plus).

2.2) Si on demande au joueur 3 de joueur au milieu et, aux joueurs 1 et 2 de se corréler en jouant avec probabilité $\frac{1}{2}$ sur $(H, G)$ et probabilité $\frac{1}{2}$ sur $(B, D)$ alors le gain du joueur 3 s'il jouent à droite ou à gauche est moins de $\frac{3}{2}$ alors qu'en jouant $z = 0$ il gagne 2. C'est un équilibre corrélé.

# Bibliographie


[1] Aumann R.J. (1964) Mixed and behaviour strategies in infinite extensive games, in *Advances in Game Theory*, Dresher M., L.S. Shapley and A.W. Tucker (eds.), Annals of Mathematics Study, **52**, Princeton University Press, 627–650.

[2] Aumann R.J. (1974) Subjectivity and correlation in randomized strategies, *Journal of Mathematical Economics*, **1**, 67-96.

[3] Aumann R.J. (1990) Nash equilibria are not self-enforcing, in *Economic Decision Making : Games, Econometrics and Optimisation (Essays in Honor of J. Dreze)*, Gabszewicz J.- J., J.-F. Richard, and L. Wolsey (eds.), Elsevier, 201-206.

[4] Aumann R.J. (1995) Backward induction and common knowledge of rationality, *Games and Economic Behavior*, **8**, 6-19.

[5] Aumann R.J. (1998) On the centipede game, *Games and Economic Behavior*, **23**, 97-105.

[6] Aumann R.J. and S. Hart (eds.) (1992) *Handbook of Game Theory*, Vol. 1, North-Holland.

[7] Aumann R.J. and S. Hart (eds.) (1994) *Handbook of Game Theory*, Vol. 2, North-Holland.

[8] Aumann R.J. and S. Hart (eds.) (2002) *Handbook of Game Theory*, Vol. 3, North-Holland.

[9] Aumann R.J. and M. Maschler (1972) Some thoughts on the minmax principle, *Management Science*, **18**, 53-63.

[10] Aumann R.J. and M. Maschler (1995) *Repeated Games with Incomplete Information*, M.I.T. Press.

[11] Aumann R.J. and L.S. Shapley (1994) Long-term competition—A game theoretic analysis, in *Essays on Game Theory in Honor of M. Maschler*, N. Megiddo (ed.), Springer, 1–15.

[12] Aumann R.J. and S. Sorin (1989) Cooperation and bounded recall, *Games and Economic Behavior*, **1**, 5-39.

[13] Başar T. and G.J. Olsder (1999) *Dynamic Noncooperative Game Theory*, Classics in Applied Mathematics, **23**, SIAM.

[14] Benedetti R. and J.-J. Risler (1990) *Real Algebraic and Semi-Algebraic Sets*, Hermann.

[15] Benoit J.-P. and V. Krishna (1985) Finitely repeated games, *Econometrica*, **53**, 905–922.

[16] Benoit J.-P. and V. Krishna (1987) Nash equilibria of finitely repeated games, *International Journal of Game Theory*, **16**, 197–204.

[17] Berge C. (1966) *Espaces Topologiques, Fonctions Multivoques*, Dunod.

[18] Bernheim D. (1984) Rationalizable strategic behavior, *Econometrica*, **52**, 1007-28.

[19] Billingsley P. (1999) *Convergence of Probability Measures*, Wiley.

[20] Blackwell D. (1956) An analog of the minmax theorem for vector payoffs. *Pacific Journal of Mathematics*, **6**, 1–8.

[21] Blackwell D. and T. Ferguson (1968) The Big Match, *Annals of Mathematical Statistics*, **33**, 882-886.

[22] Border K.C. (1999) *Fixed Point Theorems with Applications to Economics and Game Theory*, Cambridge University Press.

[23] Brouwer L. E. J. (1910) Uber Abbildung von Mannigfaltikeiten, *Mathematische Annalen*, **71**, 97-115.

[24] Brown G.W. (1951) Iterative solutions of games by fictitious play, in *Activity Analysis of Production and Allocation*, T.C. Koopmans (ed.), Wiley, 374-376.

[25] Cesa-Bianchi N. and G. Lugosi (2006) *Prediction, Learning and Games*, Cambridge University Press.

[26] Chen X. and X. Deng (2006) Settling the Complexity of Two-Player Nash Equilibrium, *FOCS,* 261-272.

[27] Demichelis S. and F. Germano (2000) On the indices of zeros of Nash fields, *Journal of Economic Theory*, **92**, 192-217.

[28] Demichelis S. and F. Germano (2002) On knots and dynamics in games, *Games and Economic Behavior*, **41**, 46-60.

[29] Demichelis S. and K. Ritzberger (2003) From evolutionary to strategic stability, *Journal of Economic Theory,* **113**, 51-75.

[30] Dresher M. (1961) *Games of Strategy*, Prentice-Hall.

[31] Dresher M., L.S. Shapley and A. W. Tucker (eds.) (1964) *Advances in Game Theory*, Annals of Mathematical Studies, **52**, Princeton University Press.

[32] Dresher M., A.W. Tucker and P. Wofe (eds.) (1957) *Contributions to the Theory of Games, III*, Annals of Mathematics Studies, **39**, Princeton University Press.

[33] Fan K. (1952) Fixed-points and minmax theorems in locally convex topological linear spaces, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the U.S.A*, **38**, 121-126.

[34] Fan K. (1953) Minimax Theorems, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the U.S.A*, **39**, 42-47.

[35] Forges F. (1986) An approach to communication equilibria, *Econometrica*, **54**, 1375-1385.

[36] Forges F. (1990) Universal mechanisms, *Econometrica*, **58**, 1341-1364.

[37] Forges F. (1992) Repeated games of incomplete information : non-zero sum, in *Handbook of Game Theory*, Vol. 1, Aumann R.J. and S. Hart (eds.), North Holland, 155-177.

[38] Forges F., J.-F. Mertens and A. Neyman (1986) A counterexample to the Folk theorem with discounting, *Economic Letters*, **20**, 7.

[39] Forges F., J. Renault, S. Sorin and N. Vieille (2006) Théorie des jeux : le prix Nobel pour les travaux de R.J. Aumann, *MATAPLI*, **79**, 47–70.

[40] Fudenberg D. and E. Maskin (1986) The Folk theorem in repeated games with discounting or with incomplete information, *Econometrica*, **54**, 533–554.

[41] Fudenberg D. and E. Maskin (1991) On the dispensability of public randomization in discounted repeated games, *Journal of Economic Theory*, **53**, 428-438.

[42] Fudenberg D. and J. Tirole (1991) Perfect Bayesian equilibrium and sequential equilibrium, *Journal of Economic Theory*, **53**, 236-260.

[43] Gale D. and L.S. Shapley (1962) College admissions and the stability of marriage, *American Mathematical Monthly*, **69**, 9-15.

[44] Gale D. and F.M. Stewart (1953) Infinite games with perfect information, in *Contributions to the Theory of Games, II*, Kuhn H.W. and A.W. Tucker (eds.), Annals of Mathematical Study, **28**, Princeton University Press, 245-266.

[45] Gilboa I. and A. Matsui (1991) Social stability and equilibrium, *Econometrica*, **58**, 859-67.

[46] Giraud G. (2009) *La Théorie des Jeux*, Flammarion.

[47] Glicksberg I. (1952) A further generalization of the Kakutani fixed point theorem, with applications to Nash equilibrium points, *Proceedings of the American Mathematical Society*, **3**, 170–174.

[48] Gossner O. (1995) The Folk theorem for finitely repeated games with mixed strategies, *International Journal of Game Theory*, **24**, 95–107.

[49] Gossner O. and T. Tomala (2007) Secret correlation in repeated games with imperfect monitoring. *Mathematics of Operations Research*, **32**, 413–424.

[50] Govindan S. and R. Wilson (1997) Equivalence and invariance of the index and degree of Nash equilibria, *Games and Economic Behavior*, **21**, 56-61.

[51] Guérrien B. (2010) *La Théorie des Jeux*, Economica.

[52] Gul F., D. Pearce and E. Stachetti (1993) A bound on the proportion of pure strategy equilibria in generic games, *Mathematics of Operations Research*, **18**, 548- 552.

[53] Hammerstein P. and R. Selten (1994) Game theory and evolutionary biology, in *Handbook of Game Theory*, Vol. 2, Aumann R.J. and S. Hart (eds.), North Holland, 929-993.

[54] Harris C. (1998) On the rate of convergence of continuous time fictitious play, *Games and Economic Behavior*, **22**, 238-259.

[55] Harsanyi J. (1967-68) Games with incomplete information played by 'Bayesian' players, parts I-III, *Management Science*, **8**, 159–182, 320–334, 486–502.

[56] Harsanyi J. (1973a) Games with randomly disturbed payoffs : a new rationale for mixed strategy equilibrium points, *International Journal of Game Theory*, **2**, 1-23.

[57] Harsanyi J. (1973b) Oddness of the number of equilibrium points : a new proof, *International Journal of Game Theory*, **2**, 235-250.

[58] Hart S. (1985) Nonzero-sum two-person repeated games with incomplete information, *Mathematics of Operations Research*, **10**, 117-153.

[59] Hart S. (2005) Adaptive heuristics, *Econometrica*, **73**, 1401-1430.

[60] Hart S. and D. Schmeidler (1989) Existence of correlated equilibria, *Mathematics of Operations Research*, **14**, 18-25.

[61] Hillas J. and E. Kohlberg (2002) Foundations of strategic equilbrium, in *Handbook of Game Theory*, Vol. 3, Aumann R.J. and S. Hart (eds.), North Holland, 1595-1663.

[62] Hofbauer J. and K. Sigmund (1998) *Evolutionary Games and Population Dynamics*, Cambridge University Press.

[63] Hofbauer J. and S. Sorin (2006) Best response dynamics for continuous zero-sum games, *Discrete and Continuous Dynamical Systems-series B*, **6**, 215-224.

[64] Kamien M., Y. Tauman and S. Zamir (1990) On the value of information in a strategic conflict, *Games and Economic Behavior*, **2**, 129-153.

[65] Kakutani S. (1941) A generalization of Brouwer's fixed point theorem, *Duke Mathematical Journal*, **8**, 416–427.

[66] Kohlberg E. and J.-F. Mertens (1986). On the strategic stability of equilibria, *Econometrica*, **54**, 1003-37.

[67] Kreps D. and J. Sobel (1998) Signalling, in *Handbook of Game Theory*, Vol. 2, Aumann R.J. and S. Hart (eds.), North Holland, 849-867.

[68] Kreps D. and R. Wilson (1982) Sequential equilibria, *Econometrica*, **50**, 863-94.

[69] Kuhn H.W. (1953) Extensive games and the problem of information, in *Contributions to the Theory of Games, II*, H.W. Kuhn and A.W. Tucker (eds.), Annals of Mathematical Studies, **28**, Princeton University Press, 193-216.

[70] Kuhn H.W. and A. W. Tucker (eds.) (1950) *Contributions to the Theory of Games, I*, Annals of Mathematics Studies, **24**, Princeton University Press.

[71] Kuhn H.W. and A. W. Tucker (eds.) (1953) : *Contributions to the Theory of Games, II*, Annals of Mathematics Studies, **28**, Princeton University Press.

[72] Laraki R. (2001) Variational inequalities, system of functional equations and incomplete information repeated games, *SIAM Journal on Control and Optimization*, **40**, 516-524.

[73] Laraki R. (2001) The splitting game and applications, *International Journal of Game Theory*, **30**, 359-376.

[74] Laraki R. (2002) Repeated games with lack of information on one side : the dual differential approach, *Mathematics of Operations Research*, **27**, 419-440.

[75] Laraki R., J. Renault et T. Tomala (2006) *Théorie des Jeux*, X-UPS 2006, Editions de l'Ecole Polytechnique.

[76] Lehrer E. (1989) Nash equilibria of $n$ player repeated games with semi-standard information, *International Journal of Game Theory*, **19**, 191–217.

[77] Lehrer E. (1989) Lower equilibrium payoffs in two-player repeated games with non-observable actions, *International Journal of Game Theory*, **18**, 57–89.

[78] Lehrer E. (1992) Correlated equilibria in two-player repeated games with non-observable actions, *Mathematics of Operations Research*, **17**, 175–199.

[79] Lehrer E. (1992) On the equilibrium payoffs set of two-player repeated games with imperfect monitoring, *International Journal of Game Theory*, **20**, 211–226.

[80] Lemke C.E. and J.T. Howson (1964) Equilibrium points of bimatrix games, *SIAM Journal*, **12**, 413-423.

[81] Loomis L.H. (1946) On a theorem of von Neumann, *Proceeding of the National Academy of Sciences of the U.S.A*, **32**, 213-215.

[82] Martin D.A. (1975) Borel determinacy, *Annals of Mathematics*, **102**, 363-371.

[83] Mas-Colell A., M. Whinston and J. Green (1995) *Microeconomic Theory*, Oxford University Press.

[84] Maynard Smith J.(1981) *Evolution and the Theory of Games*, Cambridge University Press.

[85] Mc Lennan A. and R. Tourky (2006) From imitation games to Kakutani, preprint.

[86] Mertens J.-F. (1987) Repeated Games. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Berkeley), 1986*, American Mathematical Society, 1528-1577.

[87] Mertens J.-F. (1989) Stable equilibria - A reformulation, Part I, *Mathematics of Operations Research*, **14**, 575-624.

[88] Mertens J.-F. (1991) Stable equilibria - A reformulation, Part II, *Mathematics of Operations Research*, **16**, 694-753.

[89] Mertens J.-F. (2002) Stochastic games, in *Handbook of Game Theory*, Vol. 3, Aumann R.J. and S. Hart (eds.), North Holland, 1809-1832.

[90] Mertens J.-F. and Neyman A. (1981) Stochastic games, *International Journal of Game Theory,* **10**, 53-66.

[91] Mertens J.-F., S. Sorin and S. Zamir (1994) *Repeated Games*, CORE discussion paper 9420-9422.

[92] Mertens J.-F. and S. Zamir (1971) The value of two-person zero-sum repeated games with lack of information on both sides, *International Journal of Game Theory*, **1**, 39–64.

[93] Mertens J.-F. and S. Zamir (1977) A duality theorem on a pair of simultaneous functional equations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **60**, 550–558.

[94] Milgrom P. and R. Weber (1985) Distributional strategies for games with incomplete information, *Mathematics of Operations Research*, **10**, 619-632.

[95] Mills H.D. (1956) Marginal value of matrix games and linear programs, in *Linear Inequalities and Related Systems*, Kuhn H.W. and A.W. Tucker (eds.), Annals of Mathematical Studies, **38**, Princeton University Press, 183–193.

[96] Milnor J.W. (1965) *Topology from the Differentiable Viewpoint*, Princeton U.P.

[97] Monderer D. and L.S. Shapley (1996) Potential games, *Games and Economic Behavior*, **14**, 124-143.

[98] Myerson R. (1978) Refinements of the Nash equilibrium concept, *International Journal of Game Theory*, **7**, 73-80.

[99] Myerson R. (1991) *Game Theory*, Harvard University Press.

[100] Myerson R. (1998) Communication, correlated equilibria and incentive compatibility, in *Handbook of Game Theory*, Vol. 2, Aumann R.J. and S. Hart (eds.), North Holland, 827-847.

[101] Nash J. (1950) Equilibrium points in $n$-person games, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **36**, 48–49.

[102] Nash J. (1951) Non-cooperative games, *Annals of Mathematics*, **54**, 286-295.

[103] Neyman A. and S. Sorin (2003) *Stochastic Games and Applications*, NATO Science Series, Kluwer Academic Publishers.

[104] Nikaido H. and K. Isoda (1955) Note on non cooperative convex games, *Pacific Journal of Mathematics*, **5**, 807-815.

[105] Nisan N., T. Roughgarden, E. Tardos and V. Vazirani (2007) *Algorithmic Game Theory*, Cambridge University Press.

[106] Osborne M.J. and A. Rubinstein (1994) *A Course in Game Theory*, MIT Press.

[107] Owen G. (1995) *Game Theory*, Academic Press.

[108] Parthasarathy K. R. (1967) *Probability Measures on Metric Spaces*, Academic Press.

[109] Parthasarathy T. and T.E.S. Raghavan (1971) *Some Topics in Two-Person Games*, Elsevier.

[110] Pearce D. (1984) Rationalizable strategic behavior and the problem of perfection, *Econometrica*, **52**, 1029-50.

[111] Renault J. (2000) 2-player repeated games with lack of information on one side and state independent signalling, *Mathematics of Operations Research*, **25**, 552–572.

[112] Renault J. (2006) The value of Markov chain repeated games with lack of information on one side, *Mathematics of Operations Research*, **31**, 490-512.

[113] Renault J. (2012) The value of repeated games with an informed controller. *Mathematics of Operations Research*, **37**, 154-179.

[114] Renault J. and T. Tomala (1998) Repeated proximity games, *International Journal of Game Theory*, **27**, 539–559.

[115] Renault J. and T. Tomala (2004) Communication equilibrium payoffs of repeated games with imperfect monitoring, *Games and Economic Behavior*, **49**, 313–344.

[116] Reny P. (1999) On the existence of pure and mixed Nash equilibria in discontinuous games, *Econometrica*, **67**, 1029-1056.

[117] Robinson J. (1951) An iterative method of solving a game, *Annals of Mathematics*, **54**, 296-301.

[118] Rosenberg D. and S. Sorin (2001) An operator approach to zero-sum repeated games, *Israel Journal of Mathematics*, **121**, 221–246.

[119] Rosenthal R. (1982) Games of perfect information, predatory pricing and the Chain Store paradox, *Journal of Economic Theory*, **25**, 92-100.

[120] Rubinstein A. (1982) Perfect equilibrium in a bargaining model, *Econometrica*, **50**, 97-110.

[121] Rubinstein A. (1994) Equilibrium in supergames, in *Essays in Game Theory in Honor of M. Maschler*, N. Meggiddo (ed.) Springer-Verlag, 17-28.

[122] Selten R. (1975) Re-examination of the perfectness concept for equilibrium points in extensive games, *International Journal of Game Theory*, **4**, 25-55.

[123] Shapley L.S. (1953) Stochastic games, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the U.S.A.*, **39**, 1095-1100.

[124] Simon R.S., S. Spież and H. Toruńczyk (1995) The existence of equilibria in certain games, separation for families of convex functions and a theorem of Borsuk-Ulam type, *Israel Journal of Mathematics*, **92**, 1–21.

[125] Sion M. (1958) On general minimax theorems, *Pacific Journal of Mathematics*, **8**, 171–176.

[126] Sion M. and P. Wolfe (1957) On a game without a value, in *Contibutions to the Theory of Games, III*, Dresher M., A.W. Tucker and P. Wolfe (eds.), Annals of Mathematical Studies, **39**, Princeton University Press, 299-306.

[127] Solan E. (1999) Three-Player absorbing games, *Mathematics of Operation Research,* **24**, 669-698.

[128] Solan E. and N. Vieille (2001) Quitting games, *Mathematics of Operation Research,* **26**, 265-285.

[129] Sorin S. (1983) Some results on the existence of Nash equilibria for non-zero sum games with incomplete information *International Journal of Game Theory*, **12**, 193–205.

[130] Sorin S. (1986a) On repeated games with complete information, *Mathematics of Operations Research*, **11**, 147–160.

[131] Sorin S. (1986b) Asymptotic properties of a non zero-sum stochastic game, *International Journal of Game Theory,* **15**, 101-107.

[132] Sorin S. (1992) Repeated games with complete information, in *Handbook of Game Theory*, Vol. 1, R.J. Aumann and S. Hart (eds.), North Holland, 71–107.

[133] Sorin S (1999) Merging, reputation and repeated games with incomplete information, *Games and Economic Behavior*, **29**, 274-308.

[134] Sorin S. (2002) *A First Course on Zero-Sum Repeated Games*, Mathématiques et Applications, **37**, Springer.

[135] Tarski A. (1955) A lattice theoretical fixed point theorem and its applications, *Pacific Journal of Mathematics*, **5**, 285-308.

[136] Topkis D. (1979) Equilibrium points in non zero-sum $n$ person submodular games, *SIAM Journal of Control and Optimization*, **17**, 773-787.

[137] Van Damme E. (1984) A relation between perfect equilibria in extensive form games and proper equilibria in normal form games, *International Journal of Game Theory*, **13**, 1-13.

[138] Van Damme E. (1987) *Stability and Perfection of Nash Equilibria*, Springer.

[139] Van Damme E. (1992) Refinement of Nash equilibrium, in *Advances in Economic Theory* (6th Congress Econometric Society), Laffond J.-J. (ed.), Cambridge University Press, 32-75.

[140] van Damme E. (1994) Evolutionary game theory, *European Economic Review*, **34**, pp. 847-858

[141] van Damme E. (2002) Strategic equilibrium, in *Handbook of Game Theory*, Vol. 3, R.J. Aumann and S. Hart (eds.), North Holland, 1521-1596.

[142] Vieille N. (2000a). Two-player stochastic games I : a reduction, *Israël Journal of Mathematics,* **119**, 55-91.

[143] Vieille N. (2000b). Two-player stochastic games II : the case of recursive games, *Israël Journal of Mathematics,* **119**, 93-126.

[144] Vieille N. (2002) Stochastic games : recent results, in *Handbook of Game Theory*, Vol. 3, Aumann R.J. and S. Hart (eds.), North Holland, 1833-1850.

[145] Ville J. (1938) Sur la théorie générale des jeux où intervient l'habileté des joueurs, in E. Borel, *Traité du Calcul des Probabilités et de ses Applications*, Tome IV, Gauthier-Villars, 105-113.

[146] Vives X. (1990) Nash equilibrium with strategic complementarities, *Journal of Mathematical Economics*, **19**, 305-321.

[147] Von Neumann J. (1928) Zur Theorie der Gesellschaftsspiele, *Mathematische Annalen*, **100**, 295–320.

[148] Von Neumann J. and O. Morgenstern (1944) *Games and Economic Behavior*, Princeton University Press.

[149] Weibull J. (1995) *Evolutionary Game Theory*, MIT Press.

[150] Weyl H. (1950) Elementary proof of a minimax theorem due to von Neumann, in *Contributions to the Theory of Games, I*, H.W. Kuhn and A. W. Tucker (eds.), Annals of Mathematical Studies, **24**, Princeton University Press, 19-25.

[151] Zamir S. (1992) Repeated games of incomplete information : zero-sum, in *Handbook of Game Theory*, Vol. 1, Aumann R.J. and S. Hart (eds.), North Holland, 109-154.

[152] Zermelo E. (1912) Über eine Anwendring der Mengenlehrer auf die Theorie des Schachspiels, *Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematicians (Cambridge), 1912*, vol. II, 501.

# Index

*Dans la même collection*

**BIOLOGIE**
*Bioinformatique. Génomique et post-génomique* - F. Dardel et F. Képès - 250 pages - ISBN 2-7302-0927-1

**CHIMIE**
*Chimie moléculaire des éléments de transition* - F. Mathey et A. Sevin - 300 pages - ISBN 2-7302-0714-7

*Les orbitales moléculaires dans les complexes - avec Exercices et Corrigés* - Y. Jean
350 pages - ISBN 2-7302-1024-5

*Chimie moléculaire, sol-gel et nanomatériaux* - R. Corriu et Nguyen T.-A.
208 pages - ISBN 978-2-7302-1413-1

*Introduction à la chimie quantique* - P. Hiberty et Nguyen T.-A. - 320 pages - ISBN 978-2-7302-1485-8

**INFORMATIQUE**
*Introduction à la théorie des langages de programmation* - G. Dowek, J.-J. Lévy
112 pages - ISBN 978-2-7302-1333-2

*Les principes des langages de programmation* - G. Dowek - 176 pages - ISBN 978-2-7302-1526-8

*Les démonstrations et les algorithmes : introduction à la logique et la calculabilité* - G. Dowek - 200 pages - ISBN 978-2-7302-1569-5

**ÉCONOMIE**
*Introduction à la microéconomie* - N. Curien
110 pages - ISBN 2-7302-0722-8 - ISBN 978-2-7302-0722-5

*Introduction à l'analyse macroéconomique* - P.-A. Muet - 208 pages - ISBN 2-7302-1140-3

*Économie de l'entreprise* - J.-P. Ponssard, D. Sevy, H. Tanguy (2e édition)
316 pages - ISBN 978-2-7302-1244-1

*Corporate Social Responsibility? From Compliance to Opportunity* - P. Crifo, J.-P. Ponssard - 298 pages - ISBN 978-2-7302-1568-8

*Économie du climat. Pistes pour l'après-Kyoto* - J.-P. Ponssard et O. Godard - 314 pages
ISBN 978-2-7302-1576-3

**MATHÉMATIQUES**
*Le problème de Kepler. Histoire et théorie* - A. Guichardet - 102 pages - ISBN 978-2-7302-1596-1

*Autour des inégalités isopérimétriques* - Sous la direction de Alessio Figalli - 130 pages - ISBN 978-2-7302-1573-2

*Éléments d'analyse et d'algèbre (et de théorie des nombres)* - Nouvelle édition - P. Colmez - 678 pages - ISBN 978-2-7302-1587-9

*Transversalité, Courants et Théorie de Morse. Un cours de topologie différentielle (exercices proposés par François Labourie)* - F. Laudenbach - 200 pages - ISBN 978-2-7302-1585-5

*Groupes et représentations* - D. Renard - 223 pages - ISBN 978-2-7302-1571-8
*Milieux continus en transformations finies. Hyperélasticité, Rupture, Élastoplasticité* - C. Stolz - 278 pages - ISBN 978-2-7302-1562-6

*Éléments d'analyse et d'algèbre (et de théorie des nombres)* - P. Colmez -488 pages-ISBN 978-2-7302-1563-3
*Cours d'analyse* - J.-M. Bony - 272 pages - ISBN 2-7302-0775-1

*Calcul différentiel et intégral* - F. Laudenbach - 220 pages - ISBN 2-7302-0724-4

*Méthodes mathématiques pour les sciences physiques* - J.-M. Bony - 217 pages - ISBN 2-7302-0723-6

*Les théorèmes de Noether* - Y. Kosmann-Schwarzbach, avec la collaboration de L. Meersseman
180 pages - ISBN 2-7302-1138-1 (2e édition)

*Groupes et symétries. Groupes finis, groupes et algèbres de Lie, représentations* - Y. Kosmann-Schwarzbach
222 pages - ISBN 978-2-7302-1257-1 (2e édition)

*Algèbre corporelle* - A. Chambert-Loir - 200 pages - ISBN 2-7302-1217-5

*Calcul variationnel* - J.-P. Bourguignon - 348 pages - ISBN 978-2-7302-1415-5

*Aspects des systèmes dynamiques* - XUPS1994-1996 - N. Berline et C. Sabbah (Comité éditorial)
238 pages - ISBN 978-2-7302-1560-2

*Aspects de la théorie du contrôle* - XUPS1999 - N. Berline et C. Sabbah (Comité éditorial)
208 pages - ISBN 978-2-7302-1530-5

*Groupes finis* - XUPS 2000 - N. Berline et C. Sabbah (Comité éditorial)
104 pages - ISBN 2-7302-0751-5

*Pavages* - XUPS 2001 - N. Berline et C. Sabbah (Comité éditorial) - 112 pages - ISBN 2-7302-0855-0

*La fonction zêta* - XUPS 2002 - N. Berline et C. Sabbah (Comité éditorial)
206 pages - ISBN 2-7302-1011-3

*Distributions* - XUPS 2003 - Dans le sillage de Laurent Schwartz - N. Berline et C. Sabbah (Comité éditorial) - 106 pages - ISBN 2-7302-1095-4

*Graphes*- XUPS 2004 - N. Berline et C. Sabbah (Comité éditorial) - 84 pages - ISBN 2-7302-1182-9

*Théorie algorithmique des nombres et équations diophantiennes* - XUPS2005 - N. Berline, A. Plagne et C. Sabbah (Comité éditorial) - 200 pages - ISBN 2-7302-1293-0

*Théorie des jeux. Introduction à la théorie des jeux répétés* - XUPS 2006 - N. Berline, A. Plagne et C. Sabbah (Comité éditorial) - 152 pages - ISBN 978-2-7302-1366-0

*Sur la dynamique des groupes de matrices et applications arithmétiques* - XUPS2007 - N. Berline, A. Plagne et C. Sabbah (Comité éditorial) - 160 pages - ISBN 978-2-7302-1418-6

*Géométrie tropicale* - XUPS2008 - P. Harinck, A. Plagne et C. Sabbah (Comité éditorial)
128 pages - ISBN 978-2-7302-1529-9

*Les représentations linéaires et le grand théorème de Fermat* - XUPS2009 - P. Harinck, A. Plagne et C. Sabbah (Comité éditorial) - 140 pages - ISBN 978-2-7302-1566-4
*Facettes mathématiques de la mécanique des fluides* - XUPS2010 - P. Harinck, A. Plagne et C. Sabbah (Comité éditorial) - 118 pages - ISBN 978-2-7302-1578-7

*Histoire de mathématiques* - XUPS2011 - P. Harinck, A. Plagne et C. Sabbah (Comité éditorial)
118 pages - ISBN 978-2-7302-1595-4

Séminaires, équations aux dérivées partielles - Années 1971 à 1992
Séminaires, équations aux dérivées partielles - Années 1993 à 2001
Séminaires, équations aux dérivées partielles - Année 2000-2001 - 400 pages - ISBN 2-7302-0834-8
Séminaires, équations aux dérivées partielles - Année 2001-2002 - 364 pages - ISBN 2-7302-0930-1
Séminaires, équations aux dérivées partielles - Année 2002-2003 - 390 pages - ISBN 2-7302-1041-5
Séminaires, équations aux dérivées partielles - Année 2003-2004 - 404 pages - ISBN 2-7302-1183-7 Séminaires, équations aux dérivées partielles - Année 2004-2005 - 404 pages - ISBN 2-7302-1221-3 Séminaires, équations aux dérivées partielles - Année 2005-2006 - 366 pages - ISBN 2-7302-1335-X
Séminaires, équations aux dérivées partielles - Année 2006-2007 - 444 pages - ISBN 978-2-7302-1414-8
Séminaires, équations aux dérivées partielles - Année 2008-2009 - 308 pages - ISBN 978-2-7302-1567-1

**Mathématiques appliquées**
*Une exploration des signaux en ondelettes* - S. Mallat - 654 pages - ISBN 2-7302-0733-3

*Promenade aléatoire* - M. Benaïm et N. El Karoui - 316 pages - ISBN 2-7302-1168-3

*Analyse numérique et optimisation* - G. Allaire - 480 pages - ISBN 978-2-7302-1255-7

*Systèmes hyperboliques de lois de conservation. Application à la dynamique des gaz* - F. Dubois, B. Després
208 pages - ISBN 2-7302-1253-1

*Commande et optimisation de systèmes dynamiques* - F. Bonnans et P. Rouchon
286 pages - ISBN 2-7302-1251-5

*Les outils stochastiques des marchés financiers. Une visite guidée de Einstein à Black-Scholes* - N. El Karoui et E. Gobet - 238 pages - ISBN 978-2-7302-1579-4

*Simulation stochastique et méthodes de Monte-Carlo* - C. Graham et D. Talay - 210 pages - ISBN 978-2-7302-1582-4

*Aléatoire. Introduction à la théorie et au calcul des probabilités* - S. Méléard - 280 pages - ISBN 978-2-7302-1575-6

**Mécanique**
*Dynamique de l'atmosphère et de l'océan* - P. Bougeault et R. Sadourny - 312 pages - ISBN 2-7302-0825-9

*Introduction aux écoulements compressibles et aux fluides hétérogènes* - A. Sellier
175 pages - ISBN 2-7302-0764-5

*Mécanique des milieux continus* - J. Salençon
Tome 1 - *Concepts généraux* - 376 pages - ISBN 978-2-7302-1245-8 (avec CD-Rom)
Tome 2 - *Thermoélasticité* - 344 pages - ISBN 978-2-7302-1419-3 (avec CD-Rom)
Tome 3 - *Milieux curvilignes* - 154 pages - ISBN 2-7302-0962-X

*de l'Élasto-plasticité au Calcul à la rupture* - J. Salençon
(accompagné d'un CD-Rom réalisé par J. Salençon) - 266 pages - ISBN 978-2-7302-0915-1

*Viscoélasticité pour le calcul des structures* - J. Salençon - 160 pages - ISBN 978-2-7302-1557-2

*Fluides et Solides* - E. de Langre - 130 pages - ISBN 978-2-7302-0833-8

*Ondes acoustiques* - A. Chaigne - 224 pages - ISBN 2-7302-0840-2

*Stabilité des matériaux et des structures* - C. Stolz - 206 pages - ISBN 2-7302-1076-8

*Instabilités, Chaos et Turbulence* - P. Manneville - 360 pages - ISBN 2-7302-0913-1

*Vibrations des structures couplées avec le vent* - P. Hémon - 144 pages - ISBN 2-7302-1332-5

*Analyse des solides déformables par la méthode des éléments finis* - M. Bonnet et A. Frangi
316 pages - 2-7302-1349-X

*Dynamique et vibrations* - E. de Langre et A. Chaigne - 152 pages - ISBN 978-2-7302-1521-3

*Modélisation et calcul des milieux continus* - P. Le Tallec - 560 pages - ISBN 978-2-7302-1494-0

*Poutres et arcs élastiques.* P. Ballard et A. Millard - 312 pages - ISBN 978-2-7302-1561-9

*Hydrodynamique de l'environnement.* O. Thual - 328 pages - ISBN 978-2-7302-1564-0

*Microhydrodynamique et fluides complexes.* D. Barthès-Biesel - 292 pages - ISBN 978-2-7302-1572-5

**PHYSIQUE**

*Physique des Tokamaks* - Jean-Marcel Rax - 436 pages - ISBN 978-2-7302-1580-0

*Semi-conducteurs : les bases de la théorie k.p* - G. Fishman - 742 pages - ISBN 978-2-7302-1497-1

*Énergie nucléaire* - J.-L. Basdevant, J. Rich et M. Spiro - 340 pages - ISBN 2-7302-0901-8

*Mécanique quantique* - J.-L. Basdevant et J. Dalibard
(accompagné d'un CD-Rom de M. Joffre) 520 pages - ISBN 978-2-7302-0914-4

*Problèmes quantiques* - J.-L. Basdevant et J. Dalibard - 214 pages - ISBN 2-7302-1117-9

*Principes de la cosmologie* - J. Rich, adaptation française J.-L. Basdevant - 400 pages - ISBN 2-7302-0925-5

*Introduction à la relativité* - A. Rougé - 188 pages - ISBN 978-2-7302-0940-3

*Relativité restreinte.* La contribution d'Henri Poincaré - A. Rougé - 288 pages - ISBN 978-2-7302-1525-1

*Introduction à la physique subatomique* - A. Rougé - 448 pages - ISBN 2-7302-1231-0

*Physique statistique et illustrations en physique du solide.* - C. Hermann - 292 pages - ISBN 978-2-7302-1022-5

*Bases physiques de la plasticité des solides* - J.-C. Tolédano - 264 pages - ISBN 978-2-7302-1378-3

*Physique des électrons dans les solides. Structure de bandes, Supraconductivité et Magnétisme.* H. Alloul - Tome 1 - 360 pages - ISBN 978-2-7302-1411-7

*Physique des électrons dans les solides. Recueil d'exercices et de problèmes.* H. Alloul
Tome 2 - 272 pages - ISBN 978-2-7302-1412-4

www.editions.polytechnique.fr

Achevé d'imprimer en février 2013 - Dépôt légal : 1er trimestre 2013
N° ISBN 978 – 2 – 7302 – 1611 – 1. *Imprimé en France*

## Mathématiques appliquées



Rida
Laraki



Jérôme
Renault



Sylvain
Sorin

**Rida Laraki** est chercheur au CNRS et professeur à l'École polytechnique. Il enseigne à l'ENSAE, l'ENSTA et l'université Pierre et Marie Curie et a enseigné aux universités Paris Dauphine, Nanterre et Villetaneuse.

**Jérôme Renault**, après des passages dans les universités Paris-Dauphine, Paris 1, au CNRS et à l'École polytechnique, est maintenant professeur à l'université Toulouse 1.

**Sylvain Sorin** est professeur à l'université Pierre et Marie Curie (Paris 6) après avoir enseigné aux universités Louis Pasteur (Strasbourg) et Paris X-Nanterre. Il a également été professeur à l'ENSAE et à l'École polytechnique.

Cet ouvrage est destiné aux étudiants en master ainsi qu'aux étudiants des écoles d'ingénieurs. Les connaissances mathématiques requises sont celles d'une licence scientifique.

Ce cours est consacré à une présentation des principaux concepts et outils mathématiques de la théorie des jeux stratégiques.
L'accent est mis sur l'exposé et les preuves des résultats fondamentaux (minmax et opérateur valeur, équilibre de Nash et corrélé).
Par ailleurs certains développements récents sont présentés : variété des équilibres, dynamiques de sélection, apprentissage et jeux répétés.
L'ouvrage comporte une importante section d'exercices et corrigés.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ParisTech

ellipses
*Diffusion*

ISBN 978-2-7302-1611-1



